Metodi Matematici Avanzati della Fisica

Alexandre Kamenchtchik

Introduzione

Il corso di Metodi Matematici Avanzati della Fisica è dedicato a metodi geometrici di fisica matematica moderna o, in altre parole, ad alcuni aspetti della geometria differenziale moderna, che trovano tante applicazioni in fisica teorica dalla relatività generale e cosmologia alla teoria dei campi quantistici. Per la geometria differenziale moderna è tipico l'approccio che sottolinea le proprietà invarianti geometriche degli oggetti allo studio e cerca di evitare di usare le coordinate quando questo non sia strettamente necessario. Inoltre, si cerca di studiare autonomamente diverse strutture geometriche esistenti in vari insiemi, che appaiono in geometria, cioè fare uno studio separato delle proprietà topologiche, delle strutture differenziali, della struttura metrica, della connessione affine e così via.

Il contenuto principale del corso consiste nello studio delle varietà differenziabili, tensori e campi tensoriali, della derivazione di Lie, dei gruppi di Lie come varietà differenziabili, delle forme differenziali, della geometria Riemanniana e della connessione affine, includendo anche alcune applicazioni alla gravità e alla cosmologia.

Cominciamo dall'introduzione di alcune nozioni insiemistiche, algebriche e topologiche.

0.1 Insiemi ed applicazioni

Definizione 0.1.

Siano X e Y due insiemi; una applicazione da X a Y è una relazione (una legge, una regola) da X a Y che mette in corrispondenza (che associa) ad ogni elemento $x \in X$ un elemento $y \in Y$, univocamente determinato da x.

L'insieme delle applicazioni da un insieme X ad un insieme Y viene indicato con Y^X.

Una applicazione f da X a Y viene solitamente indicata con $f : X \to Y$. Se all'elemento $x \in X$ la f associa l'elemento $y \in Y$, si usa scrivere $y = f(x)$ e dire che y è immagine di x e x è retroimmagine o controimmagine di y.

Se A è un sottoinsieme di X, si indica con $f(A)$ l'insieme $\{f(x)|x \in A\}$; se B è un sottoinsieme di Y, si indica con $f^{-1}(B)$ l'insieme $\{w \in X|f(w) \in B\}$.

Definizione 0.2.

Si dice che una applicazione $f : X \to Y$ è
suriettiva se per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ tale che $f(x) = y$;
iniettiva se per ogni $y \in Y$ esiste al più un $x \in X$ tale che $f(x) = y$;
biiettiva se è suriettiva e iniettiva.

Il prodotto di due applicazioni $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ è una applicazione da X a Z, che verrà indicata con fg o $g \circ f$.

0.2 Applicazioni fra strutture algebriche

Le nozioni di una applicazione suriettiva, iniettiva e biettiva trattano di proprietà insiemistiche di varie applicazioni senza badare ad una possibile presenza di varie strutture esistenti negli insiemi allo studio. Supponiamo, che questi insiemi hanno certe strutture algebriche. In questo caso si possono introdurre delle applicazioni che rispettano queste strutture algebriche. Prima di parlare di queste applicazioni introduciamo alcune nozioni, riguardanti le strutture algebriche, e alcune strutture algebriche che saranno utili per lo sviluppo di metodi geometrici.

Definizione 0.3.

Siano X e Y due insiemi. Il prodotto cartesiano $X \times Y$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate $\{x, y\}$, laddove $x \in X$ e $y \in Y$.

Definizione 0.4.

Siano X, Y e Z tre insiemi; si chiama legge di composizione (binaria) fra X e Y con risultato in Z una applicazione f da $X \times Y$ a Z. Più in generale si chiama operazione fra X e Y con risultato in Z un'applicazione da un sottoinsieme di $X \times Y$ a Z. Per indicare che $z = f(x, y)$ con $z \in Z, x \in X, y \in Y$ si preferisce usare notazioni del tipo $z = x \star y$ oppure $z = x \circ y$, ecc. Per $X = Y = Z$ si parla di operazioni e leggi di composizione interne.

Il termine struttura algebrica indica un insieme X in cui sono definite una o più operazioni $\star, \circ, \ldots$; essa verrà indicata con $(X, \star, \circ, \ldots)$.

Definizione 0.5.

Un'operazione $\star$ in un insieme X viene detta commutativa se per ogni $a, b \in X$ per cui è definito $a \star b$ è definito anche $b \star a$ e $b \star a = a \star b$.

Definizione 0.6.

Sia $\star$ un'operazione in un insieme X; si dice che $\star$ è associativa se per ogni $a, b, c \in X$ per cui sono definite $a \star b$ e $(a \star b) \star c$ sono definite anche $b \star c$ e $a \star (b \star c)$ e $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

Definizione 0.7.

Sia S un insieme in cui è definita una legge di composizione $\star$, se la $\star$ è associativa, la struttura $(S; \star)$ viene detta semigruppo.

Definizione 0.8.

Sia $(S; \star)$ un insieme dotato di legge di composizione; un elemento $e \in S$ viene detto elemento neutro se per ogni $a \in S$ si ha

$$a \star e = e \star a = a.$$

Definizione 0.9.

Un semigruppo $(S; \star)$ dotato di un elemento neutro viene detto monoide.

Definizione 0.10.

Sia $\star$ una legge di composizione di un insieme S con elemento neutro e;

un elemento s^{-1} viene detto inverso di un elemento $s \in S$ se e solo se

$$s^{-1} \star s = s \star s^{-1} = e.$$

Definizione 0.11.

Si chiama gruppo un monoide $(S; \star)$ in cui ogni elemento ha inverso. L'elemento neutro di un gruppo viene spesso detto unità. Se l'operazione $\star$ è commutativa, si usa dire che il gruppo è abeliano. Se l'insieme S è finito, il numero dei suoi elementi viene detto ordine del gruppo.

Definizione 0.12.

Per ogni insieme non vuoto X l'insieme S_X delle applicazioni biettive di X in sé è un gruppo rispetto al prodotto di applicazioni $(S_X; \cdot)$.

Definizione 0.13.

Per $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ il gruppo $(S_X; \cdot)$ viene indicato con S_n e viene chiamato gruppo simmetrico su n lettere o gruppo di sostituzioni o gruppo di permutazioni. Il gruppo S_n ha ordine $n!$. Ogni sostituzione (permutazione) può essere rappresentata come un prodotto di scambi o trasposizioni di elementi vicini. Quindi una sostituzione viene detta pari (o dispari) se essa può essere decomposta in un prodotto di un numero pari (o dispari) di scambi.

Definizione 0.14.

Si chiama gruppo di trasformazioni su un insieme X un qualunque sottogruppo del gruppo S_X costituito dalle applicazioni biettive di un insieme X su se stesso rispetto al prodotto di applicazioni.

Definizione 0.15.

Sia $(S; \star, \circ)$ una struttura algebrica in cui sono definite due operazioni; si dice che vale la proprietà distributiva a sinistra di $\circ$ rispetto a $\star$ se e solo se per ogni $a, b, c \in S$ per cui sono definiti $b \star c$ e $a \circ (b \star c)$, sono definiti anche $a \circ b, a \circ c, (a \circ b) \star (a \circ c)$ e

$$a \circ (b \star c) = (a \circ b) \star (a \circ c).$$

In modo analogo si enuncia la proprietà distributiva a destra.

Definizione 0.16.

Si chiama anello una struttura algebrica $(A; +, \cdot)$ che soddisfa alle seguenti condizioni:
i) $(A; +)$ è un gruppo abeliano;
ii) $(A; \cdot)$ è un semigruppo;
iii) valgono le proprietà distributive a destra e a sinistra di $\cdot$ rispetto a $+$.

Se esiste in $(A; +, \cdot)$ un elemento neutro rispetto al prodotto, esso viene detto unita dell'anello.
Se l'anello A possiede unità e un elemento $a \in A$ ammette inverso rispetto al prodotto, l'elemento a viene detto invertibile. L'elemento neutro rispetto a $+$ viene detto elemento zero o 0.

Definizione 0.17.

Si chiama corpo un anello $(K; +, \cdot)$ in cui l'insieme degli elementi diversi dallo zero 0 è un gruppo rispetto al prodotto definito nell'anello.

Definizione 0.18.

Un corpo commutativo si chiama campo.

Definizione 0.19.

Siano $(A; +, \cdot)$ un anello, $(V;+)$ un gruppo abeliano, $\bullet$ una legge di composizione fra A e V con risultato in V (ovvero una applicazione da $A \times V$ a V); si dice che V è un modulo sinistro rispetto alla legge di composizione $\bullet$ (che verrà detto prodotto esterno fra A e V) se sono soddisfatte le seguenti condizioni per ogni $a, a_1, a_2 \in A$ e per ogni $v, v_1, v_2 \in V$:
1) $a \bullet (v_1 + v_2) = a \bullet v_1 + a \bullet v_2$;
2) $(a_1 + a_2) \bullet v = a_1 \bullet v + a_2 \bullet v$;
3) $a_1 \bullet (a_2 \bullet v) = (a_1 \cdot a_2) \bullet v$.

Definizione 0.20.

Si dice che V è un A-modulo sinistro unitario se l'anello A possiede unità 1_A e $1_A \bullet v = v$ per ogni $v \in V$.

Definizione 0.21.

Se l'anello $(A; +, \cdot)$ è un corpo e V è un A-modulo sinistro unitario, V viene detto spazio vettoriale sinistro su A.

Definizione 0.22.

Siano $(A; +, \cdot)$ un anello commutativo dotato di unità, $(V;+,\star)$ un anello e $\bullet$ un prodotto esterno tra A e V con risultato in V; si dice che V è una algebra sinistra su A se $(V;+,\star)$ è un A-modulo sinistro unitario rispetto al prodotto esterno $\bullet$ e se per ogni $a \in A$ e per ogni $v_1, v_2 \in V$ è soddisfatta l'uguaglianza

$$a \bullet (v_1 \star v_2) = (a \bullet v_1) \star v_2 = v_1 \star (a \bullet v_2).$$

Ora introduciamo il concetto di un'applicazione che conserva le strutture algebriche - l'omomorfismo. Faremo questo, usando l'esempio dell'omomorfismo tra due gruppi.

Definizione 0.23.

Siano $(G; \cdot)$ e $(\bar{G}; \bullet)$ due gruppi; si chiama omomorfismo da G a $\bar{G}$ un'applicazione $f : G \to \bar{G}$ che conserva il prodotto, ovvero tale che per ogni $a, b \in G$ si ha
$f(a \cdot b) = f(a) \bullet f(b)$.
Se f è iniettiva, l'omomorfismo viene anche detto monomorfismo.
Se f è suriettiva, l'omomorfismo viene anche detto epimorfismo.
Se f è biettiva, l'omomorfismo f è un isomorfismo.

Definizione 0.24.

Un omomorfismo $f : G \to G$ viene detto endomorfismo del gruppo G.
Un endomorfismo che è anche isomorfismo si chiama automorfismo.

Omomorfismi di altre strutture algebriche si definiscono in modo analogo.

0.3 Spazi topologici e omeomorfismi

Introduciamo alcune nozioni topologiche.

Definizione 0.25.

Sia X un insieme non vuoto (il supporto di topologia), una topologia su X è una famiglia $\mathcal{O}$ di sottoinsiemi U di X, detti aperti, con le seguenti caratteristiche:
i) L'insieme vuoto $\emptyset$ e tutto il supporto sono aperti:

$$\emptyset \in \mathcal{O}, \; X \in \mathcal{O}.$$

ii) L'unione di una collezione arbitraria di insiemi aperti è un insieme aperto:

$$U_\alpha \in \mathcal{O}, \; \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \mathcal{O}.$$

iii) L'intersezione di una collezione finita di insiemi aperti è un insieme aperto:

$$U_i \in \mathcal{O}, \; i = 1, \ldots, N \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{N} U_i \in \mathcal{O}.$$

L'insieme X con la topologia in esso assegnata , cioè la coppia $(X, \mathcal{O})$ viene detto spazio topologico.

Definizione 0.26.

Sia f un'applicazione (una funzione) tra due spazi topologici (X, τ_1) e (Y, τ_2). Allora f si dice continua se la controimmagine di ogni insieme aperto è aperta, ovvero se $f^{-1}(A) = \{x \in X | f(x) \in A\}$ è un insieme aperto in X qualunque sia l' insieme A aperto di Y.

Definizione 0.27.

Un intorno di un punto di uno spazio topologico è un insieme aperto che include questo punto.

Definizione 0.28.

Un'applicazione (una funzione) f tra due spazi topologici (X, τ_1) e (Y, τ_2) si dice continua in un punto p del dominio se la controimmagine $f^{-1}(U) = \{x \in X | f(x) \in U\}$ di ogni intorno U di $f(p)$ è un intorno di p. Una funzione è quindi continua se lo è in ogni punto p di X.

Definizione 0.29.

Un omeomorfismo fra due spazi topologici X e Y è una funzione continua $f : X \to Y$ che è anche biunivoca (un'applicazione biettiva) e la cui inversa $f^{-1} : Y \to X$ è anch'essa continua. Un omeomorfismo è una corrispondenza biunivoca (una biezione) $f : X \to Y$ fra spazi topologici tale che un sottoinsieme A di X è aperto se e solo se lo è anche la sua immagine $f(A)$ in Y. Se esiste un omeomorfismo tra X e Y, i due spazi sono detti omeomorfi.

Definizione 0.30

Uno spazio di Hausdorff è uno spazio topologico nel quale per due punti distinti si possono sempre trovare degli intorni disgiunti.

Definizione 0.31.

Una varietà topologica di dimensione n è uno spazio topologico di Hausdorff X in cui ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto dello spazio euclideo n-dimensionale $\mathbb{R}^n$. Il numero n è la dimensione della varietà.

Un omeomorfismo fra un aperto di X ed un aperto di $\mathbb{R}^n$ è detto una carta. Quindi X è una varietà topologica se esiste un insieme di carte che ricoprono tutto X. Un insieme di carte di questo tipo è atlante.

Si può dire che una carta (U_i, ϕ_i) è un omeomorfismo $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ che ad un aperto $U_i \subset X$ mette in relazione un aperto $B_i = \phi_i(U_i)$ di $\mathbb{R}^n$. Quindi, per ogni punto $P \in U_i$ esiste una carta:

$$\phi(P) = (x_1(P), \dots, x_n(P))$$

e le funzioni $\{x(P)\}$ sono dette coordinate di P rispetto alla carta (U_i, ϕ_i).

Un punto può appartenere a due o più carte diverse. In questo caso le coordinate di questo punto in una carta sono funzioni delle coordinate nell'altra carta. Queste funzioni si chiamano funzioni di transizione o funzioni di incollamento.

È facile vedere che le funzioni di transizione di una varietà topologica sono funzioni continue dal punto di vista della topologia naturale dello spazio $\mathbb{R}^n$.

1 Varietà differenziabili

In questa sezione introduciamo la nozione di una varietà differenziabile. Una varietà differenziabile è una varietà topologica su cui è possibile usare gli strumenti del calcolo infinitesimale. Grazie a questi strumenti è possibile parlare di spazio tangente, campo vettoriale, funzione differenziabile, forma differenziale, ecc.

Brevemente parlando, si può dire che una varietà differenziabile è una varietà topologica, le cui funzioni di transizione sono funzioni differenziabili (e non solamente continue come nel caso di una varietà topologica).

Ora diamo alcune definizioni più dettagliate.

Definizione 1.1.

Uno pseudogruppo di trasformazioni di uno spazio topologico X è un insieme Γ di trasformazioni che soddisfano gli assiomi seguenti.
(1) Ogni $f \in \Gamma$ è un omeomorfismo da un insieme aperto (chiamato dominio di f) di X ad un altro insieme aperto (chiamato codominio di f) di X;
(2) Se $f \in \Gamma$, allora la restrizione di f ad un sottoinsieme aperto arbitrario del dominio di f appartiene a Γ;
(3) Sia $U = \bigcup_i U_i$ laddove ogni U_i è un insieme aperto di X. Un omeomorfismo f da U ad un insieme aperto di X appartiene a Γ se la restrizione di f a U_i è in Γ per ogni i;
(4) Per ogni insieme aperto U di X, la trasformazione identità di U è in Γ;
(5) Se $f \in \Gamma$, allora $f^{-1} \in \Gamma$;
(6) Se $f \in \Gamma$ è un omeomorfismo da U a V e $f' \in \Gamma$ è un omeomorfismo da U' a V' e se $V \bigcap U'$ non è vuoto, allora l'omeomorfismo $f' \circ f$ da $f^{-1}(V \bigcap U')$ a $f'(V \bigcap U')$ è in Γ.

Alcuni esempi di pseudogruppi.

Sia $\mathbb{R}^n$ spazio di n-tuple di numeri reali $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ con la topologia usuale. Un'applicazione f da un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ si dice di classe $C^r, r = 1, 2, \ldots, \infty$, se f ha r derivate continue. La classe C^ω include funzioni reali analitiche. Lo pseudogruppo $\Gamma^r(\mathbb{R}^n)$ di trasformazioni di classe C^r di $\mathbb{R}^n$ è l'insieme di omeomorfismi f da un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ ad un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ tali che sono entrambe f e f^{-1} sono di classe C^r. Se consideriamo solo $f \in \Gamma$ con Jacobiani positivi dappertutto, otteniamo un sottopseudogruppo $\Gamma_0^r(\mathbb{R}^n)$ di trasformazioni che preservano l'orientamento.

Definizione 1.2.

Un atlante di uno spazio topologico M compatibile con uno pseudogruppo Γ è una famiglia di coppie (U_i, φ_i), chiamate carte, tali che
(a) Ogni U_i è un insieme aperto di M e $\bigcup_i U_i = M$;
(b) Ogni φ_i è un omeomorfismo da U_i ad un insieme aperto di X;
(c) Se $U_i \bigcap U_j$ non è vuoto, l'applicazione $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ di $\varphi_i(U_i \bigcap U_j)$ a $\varphi_j(U_i \bigcap U_j)$ è un elemento di Γ.

Definizione 1.3.

Un atlante completo di M compatibile con Γ è un atlante compatibile con Γ che non è contenuto in nessun altro atlante di M compatibile con Γ. Ogni atlante di M compatibile con Γ è contenuto in un atlante unico completo di M compatibile con Γ. Infatti, dato un atlante $A = \{(U_i, \varphi_i)\}$ di M compatibile con Γ, consideriamo $\tilde{A}$ - la famiglia di tutte le coppie (U, φ) tali che φ è un omeomorfismo da un insieme aperto U di M ad un insieme aperto di X e tali che $\varphi_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \bigcap U_i) \to \varphi_i(U \bigcap U_i)$ è un elemento di Γ quando $U \bigcap U_i$ non è vuoto. Allora $\tilde{A}$ è un atlante completo che contiene A.

Definizione 1.4.

Una varietà differenziabile di classe C^r è uno spazio di Hausdorff con un atlante fisso completo compatibile con $\Gamma^r(\mathbb{R}^n)$. Il numero intero n si chiama dimensionalità della varietà. Ogni atlante di uno spazio di Hausdorff, allargato ad un atlante completo, definisce una struttura differenziabile di classe C^r. Per ogni struttura differenziabile di classe C^r, una carta ammissibile è una carta che appartiene all'atlante fisso completo che definisce questa struttura.

Data una carta ammissibile (U_i, φ_i) di una varietà n-dimensionale M di classe C^r, il sistema di funzioni $x^1 \circ \varphi_i, \ldots, x^n \circ \varphi_i$, definita su U_i si chiama sistema di coordinate locale in U_i. Per ogni punto p di M è possibile trovare una carta (U_i, φ_i) tale che $\varphi_i(p)$ è l'origine di $\mathbb{R}^n$ e φ_i è un omeomorfismo di U_i definito via $|x^1| < a, \cdots, |x^n| < a$ per un numero positivo a. U_i si chiama intorno cubico di p.

Definizione 1.5.

Date due varietà M e M' di classe C^r, l'applicazione $f : M \to M'$ si chiama applicazione differenziabile di classe $C^k, k \leq r$, se, per ogni carta (U_i, φ_i) di M ed ogni carta (V_j, ψ_j) di M' tali che $f(U_i) \subset V_j$, l'applicazione $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ di $\varphi_i(U_i)$ a $\psi_j(f(V_j))$ è di classe C^k. Se $u^1, \ldots, u^n$ è un sistema locale di coordinate in U_i e $v^1, \ldots, v^m$ è un sistema locale di coordinate in V_j, allora f può essere espressa mediante un insieme di funzioni differenziabili di classe C^k:

$$v^1 = f^1(u^1, \ldots, u^n), \ldots, v^m = f^m(u^1, \ldots, u^n).$$

Un'applicazione differenziabile è un'applicazione di classe C^∞.

Introduciamo ora una delle nozioni più importanti della geometria differenziale - il diffeomorfismo.

Definizione 1.6.

Un diffeomorfismo da una variietà M ad un'altra varietà M' è un omeomorfismo φ tale che entrambi φ e φ^{-1} sono differenziabili.

Esempio 1.1.

L'esempio più semplice di una varietà che non può essere coperta da una sola carta, è la sfera n-dimensionale

$$S^n = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1\}.$$

Prendiamo

$$\begin{aligned}
&U_1 = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n | x^{n+1} > -1\} \\
&= S^n - \{\text{il polo Sud}\}, \\
&U_2 = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n | x^{n+1} < 1\} \\
&= S^n - \{\text{il polo Nord}\}.
\end{aligned}$$

Introduciamo le coordinate

$$\alpha^i = \frac{x^i}{1+x^{n+1}},\ i=1,\dots,n; \quad ,x^{n+1}\neq -1,$$
$$\beta^i = \frac{x^i}{1-x^{n+1}},\ i=1,\dots,n; \quad x^{n+1}\neq 1.$$

Queste coordinate corrispondono alle proiezioni stereografiche dal polo Sud e dal polo Nord, rispettivamente. Il cambiamento delle coordinate è infinitamente differenziabile su

$$\alpha(U_1\cap U_2)=\beta(U_1\cap U_2)=\mathbb{R}^n-\{0\}.$$

Quindi, l'insieme di due carte $\{(U_1,\alpha),(U_2,\beta)\}$ è un C^∞ - atlante.

Davvero,

$$x^i = \alpha^i(1+x^{n+1});$$
$$\beta^i = \frac{\alpha^i(1+x^{n+1})}{1-x^{n+1}};$$
$$\sum_{i=1}^n(\alpha^i)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n(x^i)^2}{(1+x^{n+1})^2} = \frac{1-(x^{n+1})^2}{(1+x^{n+1})^2} = \frac{1-x^{n+1}}{1+x^{n+1}}.$$

Quindi,

$$\beta^i = \frac{\alpha^i}{\sum_{i=1}^n(\alpha^i)^2},$$

e, viceversa

$$\alpha^i = \frac{\beta^i}{\sum_{i=1}^n(\beta^i)^2}.$$

Entrambi i sistemi di funzioni sono infinitamente differenziabili se non tutti α^i o β^i sono uguali a zero, cioé in $\mathbb{R}^n-\{0\}$.

Esempio 1.2.

Consideriamo un'altro esempio, relativamente semplice, di una varietà il cui atlante contiene più di una carta - il piano proiettivo P^2. Il piano proiettivo può essere rappresentato come l'insieme di tutte le rette nello spazio $\mathbb{R}^3$, che passano attraverso l'origine delle coordinate cartesiane. Un'altra rappresentazione del piano proiettivo P^2 è una sfera di due dimensioni S^2, laddove ogni due punti antipodali vengono trattate come un punto. Introduciamo tre carte di coordinate omogenee. La prima carta include tutte le rette che non giacciono nel piano $z = 0$. Le coordinate in questa carta sono

$$u = \frac{x}{z},\ v = \frac{y}{z}, \tag{1}$$

dove x, y, z sono coordinate di un punto in $\mathbb{R}^3$ che attraversa la retta che passa anche attraverso l'origine $(0, 0, 0)$ e $z \neq 0$. Le coordinate x e y possono avere qualsiasi valore reale e questo è vero anche per le coordinate omogenee u e v. La carta (1) non include le rette che giacciono nel piano $z = 0$ e dobbiamo introdurre altre due carte:

$$p = \frac{x}{y},\ q = \frac{z}{y}, \tag{2}$$

dove $y \neq 0$ e

$$r = \frac{y}{x},\ s = \frac{z}{x}, \tag{3}$$

dove $x \neq 0$. Tre carte (1), (2) e (3) costituiscono un atlante del piano proiettivo P^2. È facile controllare che le funzioni di transizione tra queste carte sono differenziabili. Per esempio,

$$p = \frac{u}{v}$$

è differenziabile quando $v \neq 0$, cioè quando $y \neq 0$, ma l'intersezione della carta (2) con la carta (1) include solo i punti dove $y \neq 0$.

Esempio 1.3.

Consideriamo due varietà. Sia M la retta reale $\mathbb{R}$ con la topologia normale e la struttura differenziabile definita dall'atlante $\{(\mathbb{R}, \alpha)\}$, laddove $\alpha(x) = x$. Sia N ancora $\mathbb{R}$, ma con la struttura differenziabile data dall'atlante $\{(\mathbb{R}, \beta)\}$, dove $\beta(x) = x^{1/3}$. Queste due strutture differenziabili non sono equivalenti, cioè le carte $(\mathbb{R}, \alpha)$ e $(\mathbb{R}, \beta)$ non sono compatibili, poiché $\beta \circ \alpha^{-1}(x) = x^{1/3}$ e allora $\beta \circ \alpha^{-1}(x)$ non è differenziabile dappertutto.

Quindi, si possono avere delle strutture differenziabili differenti sulla stessa varietà topologica. Il fatto che M e N sono distinte ha come conseguenza la differenza

$$C^\infty(M) \neq C^\infty(N).$$

Per esempio, la funzione

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^{1/3}$$

non appartiene a $C^\infty(M)$, ma appartiene a $C^\infty(N)$.

Nonostante questo fatto, M e N siano diffeomorfi. L'applicazione

$$F: M \to N$$
$$x \to x^3$$

è un diffeomorfismo.

Davvero,

$$\alpha^{-1}(x) = x,$$
$$F \circ \alpha^{-1}(x) = x^3,$$
$$\beta \circ F \circ \alpha^{-1}(x) = x.$$

Una domanda: esistono tali strutture differenziabili su $\mathbb{R}^n$ che le varietà corrispondenti non siano diffeomorfe ?

Sì, tali strutture differenzialbili esistono su $\mathbb{R}^4$.

Definizione 1.7.

Una funzione differenziabile di classe C^k in M è un'applicazione di classe C^k da M a $\mathbb{R}$.

Definizione 1.8.

Una curva differenziabile di classe C^k in M è un'applicazione differenziabile di classe C^k da un intervallo chiuso $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ a M.

Definizione 1.9.

Sia $\mathcal{T}(p)$ algebra di funzioni differenziabili di classe C^1 definite in un intorno di p. Sia $x(t)$ una curva di classe $C^1, a \leq t \leq b$, tale che $x(t_0) = p$. Il vettore tangente alla curva $x(t)$ in p è un'applicazione $X : \mathcal{T}(p) \to \mathbb{R}$ definita come

$$Xf = \left(\frac{df(x(t))}{dt}\right)_{t_0}.$$

In altre parole, Xf è la derivata di f nella direzione della curva $x(t)$ in $t = t_0$. Il vettore X soddisfa le condizioni seguenti:
(1) X è un'applicazione lineare da $\mathcal{T}(p)$ a $\mathbb{R}$.
(2) $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$ per $f, g \in \mathcal{T}(p)$.(La regola di Leibniz).

L'insieme di applicazioni X di $\mathcal{T}(p)$ in $\mathbb{R}$ che soddisfano queste due condizioni costituisce uno spazio vettoriale reale.

Teorema 1.1.

L'insieme dei vettori in p è uno spazio vettoriale di dimensionalità n, dove n è la dimensionalità di M.

Dimostrazione

Sia $u^1, \ldots, u^n$ un sistema locale di coordinate in un intorno U di p. Per ogni j, $\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p$ è un'applicazione da $\mathcal{T}(p)$ in $\mathbb{R}$ che soddisfa le condizioni (1) e (2). Dimostriamo che l'insieme dei vettori in p è uno spazio vettoriale con la base $\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial u^n}\right)_p$. Data una curva $x(t)$ con $p = x(t_0)$, siano $u^j = x^j(t), j = 1, \ldots, n$, le sue equazioni nei termini del sistema locale di coordinate $u^1, \ldots, u^n$. Allora

$$\left(\frac{df(x(t))}{dt}\right)_{x_0} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial u^j}\right)_p \cdot \left(\frac{dx^j(t)}{dt}\right)_{t_0},$$

che dimostra che ogni vettore in p è una combinazione lineare di $\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial u^n}\right)_p$. Inversamente, data una combinazione lineare $\sum_j \xi^j \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p$, consideriamo la curva definita come

$$u^j = u^j(p) + \xi^j t,\ j = 1, \ldots, n.$$

Allora il vettore tangente a questa curva in $t = 0$ è $\sum_j \xi^j \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p$. Per dimostrare l'indipendenza lineare di $\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial u^n}\right)_p$, assumiamo $\sum_j \xi^j \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p =$

0. Allora, applicando questo vettore a u^k avremmo

$$0 = \sum_j \xi^j \left(\frac{\partial u^k}{\partial u^j}\right)_p = \xi^k \text{ per } k = 1, \cdots, n.$$

Questo completa la dimostrazione del nostro teorema.

Definizione 1.10.

L'insieme dei vettori tangenti in p, rappresentato come $T_p(M)$ o T_p, si chiama spazio tangente di M in p. La n-tupla di numeri $\xi^1, \ldots, \xi^n$ si chiama componenti del vettore $\sum_j \xi^j(\partial/\partial u^j)$ rispetto al sistema di coordinate locale $u^1, \ldots, u^n$.

Definizione 1.11.

Un campo vettoriale su una varietà M è una prescrizione di un vettore X_p ad ogni punto p di M. Se f è una funzione differenziabile su M, allora Xf è una funzione in M definita tramite $(Xf)(p) = X_p f$.

Un campo vettoriale X si chiama differenziabile se Xf è differenziabile per ogni funzione differenziabile f. In termini di un sistema di coordinate locale $u^1, \ldots, u^n$ un campo vettoriale può essere rappresentato come

$$X = \sum_j \xi^j \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right),$$

laddove ξ^j sono funzioni di coordinate. Queste funzioni si chiamano componenti di X rispetto a $u^1, \ldots, u^n$. X è differenziabile se e solo se le sue componenti sono differenziabili.

È facile vedere che il prodotto di due campi vettoriali non è un campo vettoriale, perché questo prodotto non soddisfa la regola di Leibniz. Comunque, esiste una operazione binaria nell'insieme dei campi vettoriali che mette in corrispondenza a due campi vettoriali un terzo campo vettoriale.

Definizione 1.12.

Sia $\mathcal{X}(M)$ l'insieme di tutti i campi vettoriali differenziabili su M. È uno spazio vettoriale reale rispetto all'addizione naturale e alla moltiplicazione per scalari. Se X e Y sono in $\mathcal{X}(M)$, definiamo la parentesi $[X, Y]$ come un'applicazione dall'anello di funzioni in M a se stesso mediante

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Dimostriamo che $[X, Y]$ è un campo vettoriale. Usando le coordinate locali, scriviamo

$$X = \sum_j \xi^j \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right), \; Y = \sum_j \eta^j \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right).$$

Allora

$$[X, Y]f = \sum_j \sum_k (\xi^k (\partial \eta^j / \partial u^k) - \eta^k (\partial \xi^j / \partial u^k)) \left(\frac{\partial f}{\partial u_j}\right).$$

Questo significa che $[X, Y]$ è un campo vettoriale, le cui componenti rispetto a $u^1, \ldots, u^n$ sono date da

$$\sum_k (\xi^k (\partial \eta^i / \partial u^k) - \eta^k (\partial \xi^i / \partial u^k)), \; i = 1, \ldots, n.$$

Davvero,

$$\sum_i \sum_j \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j} f - \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j} \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} f \right)$$
$$= \sum_i \sum_j \xi^i \eta^j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} \right)$$
$$+ \sum_i \sum_j \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial u^i} \frac{\partial f}{\partial u^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^i} \right)$$
$$= \sum_i \sum_j \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial u^i} \frac{\partial f}{\partial u^j} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} \frac{\partial f}{\partial u^j} \right)$$
$$= \sum_i \sum_j \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial u^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j} f.$$

Nel futuro spesso omettiamo i simboli delle somme, sottintendendo la somma quando ci sono due indici uguali (un pedice ed un'apice). Qualche volta questa regola viene detta regola di somma di Einstein.

Rispetto a questa operazione di parentesi, $\mathcal{X}(M)$ è una algebra di Lie sul campo di numeri reali (di dimensionalità infinita). In particolare, abbiamo l'identità di Jacobi:

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$
$$\text{per } X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Davvero, calcoliamo la doppia parentesi di Lie $[X,[Y,Z]]$:

$$[X,[Y,Z]] = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} Z^k \frac{\partial}{\partial x^k} - Z^k \frac{\partial}{\partial x^k} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$
$$- \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} Z^k \frac{\partial}{\partial x^k} - Z^k \frac{\partial}{\partial x^k} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial Z^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} - X^i \frac{\partial Z^k}{\partial x^i} \frac{\partial Y^j}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial Z^k}{\partial x^j} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$+ Z^k \frac{\partial Y^j}{\partial x^k} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + X^i Y^j \frac{\partial^2 Z^k}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} - X^i Z^k \frac{\partial^2 Y^j}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Facendo permutazioni cicliche dei campi vettoriali X, Y e Z e cambiando propriamente gli indici, arriviamo a

$$
\begin{aligned}
&[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]\\
&= X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial Z^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} - X^i\frac{\partial Z^k}{\partial x^i}\frac{\partial Y^j}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j\frac{\partial Z^k}{\partial x^j}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^i}\\
&+Z^k\frac{\partial Y^j}{\partial x^k}\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} + X^iY^j\frac{\partial^2 Z^k}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} - X^iZ^k\frac{\partial^2 Y^j}{\partial x^i\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^j}\\
&+Y^i\frac{\partial Z^j}{\partial x^i}\frac{\partial X^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} - Y^i\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{\partial Z^j}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^j} - Z^j\frac{\partial X^k}{\partial x^j}\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^i}\\
&+X^k\frac{\partial Z^j}{\partial x^k}\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} + Y^iZ^j\frac{\partial^2 X^k}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} - Y^iX^k\frac{\partial^2 Z^j}{\partial x^i\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^j}\\
&+Z^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial Y^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} - Z^i\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}\frac{\partial X^j}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^j} - X^j\frac{\partial Y^k}{\partial x^j}\frac{\partial Z^i}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^i}\\
&+Y^k\frac{\partial X^j}{\partial x^k}\frac{\partial Z^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} + Z^iX^j\frac{\partial^2 Y^k}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} - Z^iY^k\frac{\partial^2 X^j}{\partial x^i\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^j} = 0.
\end{aligned}
$$

Possiamo anche trattare $\mathcal{X}(M)$ come un modulo sopra l'algebra $\mathcal{T}(M)$ di funzioni differenziabili su M. Se f è una funzione e X è un campo vettoriale su M, allora fX è un campo vettoriale su M definito come

$$(fX)_p = f(p)X_p \quad \text{per } p \in M.$$

Allora,

$$
\begin{aligned}
&[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X\\
&f, g \in \mathcal{T}(M), X, Y \in \mathcal{X}(M).
\end{aligned}
$$

Definizione 1.13.

Un'algebra di Lie è una struttura costituita da uno spazio vettoriale $\mathcal{G}$ su un certo campo K e da un'operazione binaria $[,] : \mathcal{G}\times\mathcal{G} \to \mathcal{G}$, detta prodotto di Lie, che soddisfa le seguenti proprietà:
1. è bilineare, cioè

$$
\begin{aligned}
&[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x,z] + \beta[y,z]\\
&[z, \alpha x + \beta y] = \alpha[z,x] + \beta[z,y]\\
&\text{per ogni } \ x, y, z \in \mathcal{G},\ \ \alpha, \beta \in K;
\end{aligned}
$$

2. soddisfa l'identità di Jacobi, cioè

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0;$$

3. è nilpotente, cioè

$$[x, x] = 0, \text{ per ogni } x \in \mathcal{G}.$$

La prima e la terza proprietà insieme implicano

$$[x, y] = -[y, x] \text{ per ogni } x, y \in \mathcal{G},$$

cioè l'antisimmetria del prodotto di Lie.

Infatti,

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x] = 0.$$

Definizione 1.14.

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Un funzionale lineare è un'applicazione lineare da V al campo K. L'insieme di tutti i funzionali lineari da V a K forma lo spazio vettoriale duale V^* di V.

Definizione 1.15.

Per ogni punto p di M, lo spazio duale vettoriale $T_p^*(M)$ dello spazio tangente $T_p(M)$ si chiama spazio di covettori in p. Una prescrizione di un covettore ad ogni punto p si chiama 1-forma (la forma differenziale di grado 1). Per ogni funzione f su M, il differenziale totale $(df)_p$, o il gradiente di f in p è definito come

$$\langle (df)_p, X \rangle = Xf \text{ per } X \in T_p(M),$$

laddove $\langle , \rangle$ significa il valore della prima entrata sulla seconda entrata come un funzionale lineare su $T_p(M)$. Se $u_1, \ldots, u_n$ è un sistema locale di coordinate in un intorno di p, allora i differenziali totali $(du^1)_p, \ldots, (du^n)_p$ formano una base per $T_p^*(M)$. Infatti, loro formano una base duale della base $(\partial/\partial u^1)_p, \ldots, (\partial/\partial u^n)_p$ per $T_p(M)$.

Davvero,

$$\left\langle (du^i)_p, \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p \right\rangle = \frac{\partial}{\partial u^j} u^i = \delta^i_j.$$

In un intorno di p, ogni 1-forma ω può essere rappresentata in modo univoco come

$$\omega = \sum_j f_j du^j,$$

dove le funzioni f_j si chiamano componenti di ω rispetto a $u^1, \dots, u^n$. La 1-forma ω si chiama differenziabile se f_i sono differenziabili.

1.1 L'algebra esterna

Definizione 1.1.1.

Sia $\Lambda^p V$ lo spazio vettoriale dei funzionali p-lineari alternanti con valori reali:

$$\Lambda^p V := \{\varphi : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p \text{ volte}} \to \mathbb{R}\}.$$

Questi funzionali si chiamano p-forme o forme differenziali di grado p. Multilineare significa lineare in ognuna di p variabili; alternante significa che

$$\varphi(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) = -\varphi(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots),$$

da cioè segue che una forma definita su un insieme di vettori linearmente dipendenti è zero. In particolare,

$$\Lambda^1 = V^*.$$

Se p è maggiore di n, $\Lambda^p V$ è zero.

$$\Lambda^p V = 0, \text{ per } p > n,$$

perché ogni p-tupla di vettori è linearmente dipendente. Secondo la convenzione

$$\Lambda^0 V = \mathbb{R}.$$

Definizione 1.1.2.

Definiamo il <u>prodotto esterno</u> di una p-forma per una q-forma come una $(p+q)$-forma:

$$\wedge : \Lambda^p V \times \Lambda^q V \to \Lambda^{p+q} V, \tag{4}$$
$$(\varphi, \psi) \to \varphi \wedge \psi, \tag{5}$$
$$(\varphi \wedge \psi)(v_1, \dots, v_{p+q})$$
$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in \mathcal{L}_{p+q}} \varphi(v_{\pi(1)}, \cdots, v_{\pi(p)}) \psi(v_{\pi(p+1)}, \cdots, v_{\pi(p+q)}) \mathrm{sgn}\ \pi. \tag{6}$$

Qui π percorre tutte le permutazioni di $p+q$ oggetti e "sgn" π significa il segno della permutazione ($+$ per le permutazioni pari e $-$ per le permutazioni dispari). Per esempio, se φ e ψ sono 1-forme, abbiamo

$$(\varphi \wedge \psi)(v_1, v_2) = \varphi(v_1)\psi(v_2) - \varphi(v_2)\psi(v_1),$$

se φ è 0-forma, cioè un numero reale, allora

$$\varphi \wedge \psi = \varphi\psi.$$

Il prodotto esterno ha le seguenti proprietà:
(a) è bilineare

$$(\varphi_1 + \varphi_2) \wedge \psi = \varphi_1 \wedge \psi + \varphi_2 \wedge \psi,$$
$$\varphi \wedge (a\psi) = a(\varphi \wedge \psi) = (a\varphi) \wedge \psi), \ a \in \mathbb{R},$$

(b)è associativo

$$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi = \varphi \wedge (\psi \wedge \chi),$$

(c) è graduatamente commutativo

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \varphi, \ \varphi \in \Lambda^p V, \ \psi \in \Lambda^q V.$$

In particolare, $\varphi \wedge \varphi = 0$ quando p è dispari.

Definizione 1.1.3.

Una somma diretta di spazi vettoriali

$$\Lambda V := \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p V$$

insieme ad un prodotto esterno soddisfacente (a), (b), e (c) si chiama algebra esterna o algebra di Grassmann. Se $\Lambda^1 V = V^*$ ha la base

$$\beta^1, \ldots, \beta^n$$

allora la base di $\Lambda^p V$ viene data da

$$\beta^{i_1} \wedge \beta^{i_2} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p},\ 1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_p \leq n,$$

e quindi

$$\begin{aligned} &\dim \Lambda^p V = C_n^p \\ &\dim \Lambda V = 2^n, \end{aligned}$$

dove $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ è il coefficiente binomiale.

Ogni $\varphi \in \Lambda^p V$ può essere scomposta in questa base

$$\varphi = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} \varphi_{i_1 \cdots i_p} \beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p},\ \varphi_{i_1 \cdots i_p} \in \mathbb{R}.$$

Anche si può rappresentare questa forma così:

$$\varphi = \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \cdots i_p} \varphi_{i_1 \cdots i_p} \beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p}.$$

In quest'ultimo caso $\varphi_{i_1 \cdots i_p}$ è definito per tutti i valori degli indici (non solo nell'ordine crescente) ed è totalmente antisimmetrica.

Il concetto di prodotto esterno generalizza i concetti del prodotto vettoriale

$$(a \times b) = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

e del triplo prodotto scalare

$$(a \times b) \cdot c = \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_i$$

della geometria euclidea tridimensionale.

* * *

Torniamo ora alla varietà differenziabile M.

Definizione 1.16.

Sia $\Lambda T_p^*(M)$ l'algebra esterna su $T_p^*(M)$. Una r-forma ω è una prescrizione di un elemento di grado r in $\Lambda T_p^*(M)$ ad ogni punto p di M. In termini di un sistema di coordinate locale $u^1, \ldots, u^n$, ω può essere espressa univocamente come

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} f_{i_1 \cdots i_r} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}.$$

Definizione 1.17.

Il simbolo $\mathcal{D}^r = \mathcal{D}^r(M)$ significa uno spazio di r-forme su M. $\mathcal{D}^0(M) = \mathcal{T}(M)$.

Definizione 1.18.

Differenziazione esterna può essere caratterizzata come segue:
(1) d è un'applicazione lineare da $\mathcal{D}(M)$ a se stesso tale che

$$d(\mathcal{D}^r) \subset \mathcal{D}^{r+1};$$

(2) per una funzione $f \in \mathcal{D}^0$, df è un differenziale totale (gradiente);
(3) se $\omega \in \mathcal{D}^r$ e $\pi \in \mathcal{D}^s$, allora

$$d(\omega \wedge \pi) = d\omega \wedge \pi + (-1)^r \omega \wedge d\pi;$$

(4) $d^2 = 0$.

In termini di coordinate locali, se

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} f_{i_1 \cdots i_r} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r},$$

allora

$$d\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} df_{i_1 \cdots i_r} \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}.$$

Si possono considerare forme differenziali con valori in uno spazio vettoriale arbitrario (che non è necessariamente il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$).

Definizione 1.19.

Sia W uno spazio vettoriale di m dimensioni. Una r-forma con valori in W è una prescrizione ad ogni punto di M di un'applicazione r-lineare antisimmetrica di $T_p(M) \times \cdots \times T_p(M)$ (r volte) in W. Se prendiamo una base $e_1, \ldots, e_m$ in W, possiamo rappresentare ω come $\omega = \sum_{j=1}^{m} \omega^j e_j$, laddove ω^j sono r-forme usuali su M. La derivata esterna

$$d\omega = \sum_{j=1}^{m} d\omega^j e_j$$

è una $(r+1)$-forma con i valori in W.

Notiamo che in questa situazione generale il prodotto esterno non è definito. Per esempio nel prodotto di due 1-forme $(\varphi \wedge \psi)(v_1, v_2) = \varphi(v_1)\psi(v_2) - \cdots$ dobbiamo moltiplicare i valori $\varphi(v_1)$ e $\psi(v_2)$ che ora sono vettori nel W. Soltanto se W ha un prodotto, come il campo dei numeri complessi, un'algebra di Lie o un'algebra di Grassmann, il prodotto esterno ha un senso. Poichè il prodotto dei numeri complessi è commutativo, il prodotto esterno viene dato dalla stessa formula che il prodotto esterno per il caso dei numeri reali (6).

Discutiamo con alcuni dettagli la situazione quando W è un algebra di Lie $\tilde{g}$. In questo caso possiamo sostituire i prodotti nel secondo membro della formula (6) con commutatori. Nel primo membro omettiamo il simbolo del prodotto esterno e scriviamo $[\varphi, \psi]$. Alternativamente, se T_a è una base in $\tilde{g}$ e $V \equiv T_p(M)$, espandiamo $\varphi \in \Lambda^p(V, \tilde{g})$ e $\psi \in \Lambda^q(V, \tilde{g})$:

$$\begin{aligned} &\varphi = \sum_a \varphi^a T_a, \quad \psi = \sum_b \psi^b T_b, \\ &\varphi^a \in \Lambda^p V, \quad \psi^b \in \Lambda^q V, \end{aligned} \tag{7}$$

e otteniamo

$$[\varphi, \psi] = \sum_{a,b} \varphi^a \wedge \psi^b [T_a, T_b]. \tag{8}$$

Dall'antisimmetria del commutatore, la commutattività graduata ottiene un segno meno addizionale:

$$[\varphi, \psi] = -(-1)^{pq}[\psi, \varphi]. \tag{9}$$

L'identità di Jacobi diventa

$$[[\varphi, \psi], \chi] + (-1)^{r(p+q)}[[\chi, \varphi], \psi] + (-1)^{p(r+q)}[[\psi, \chi], \varphi] = 0,$$

dove

$$\varphi \in \Lambda^p(V, \tilde{g}),\ \psi \in \Lambda^q(V, \tilde{g}),\ \chi \in \Lambda^r(V, \tilde{g}).$$

Definizione 1.20.

Consideriamo un'applicazione f da una varietà M ad un'altra varietà M'. Il differenziale in p di f è un'applicazione lineare f_* di $T_p(M)$ a $T_{f(p)}(M')$ definita come segue. Per ogni $X \in T_p(M)$ scegliamo una curva $x(t)$ in M tale che X è un vettore tangente a $x(t)$ in $p = x(t_0)$. Allora $f_*(X)$ è un vettore tangente alla curva $f(x(t))$ in $f(p) = f(x(t_0))$.

Se g è una funzione differenziabile in un intorno di $f(p)$, allora

$$(f_*(X))g = X(g \circ f).$$

Davvero, f può essere rappresentata come $v^i(u^j)$ laddove v^i sono coordinate locali in M' e u^j sono coordinate locali in M. Allora

$$g \circ f = g(v^i(u^j)).$$

Poi

$$X = \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j},$$

la curva a cui X è tangente puó avere la forma

$$u^j = u^j(p) + \xi^j t.$$

La curva corrispondente in M' è

$$v^i(u^j(p) + \xi^j t) = v^i(u^j(p)) + \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(p) \times \xi^j t.$$

Il vettore tangente a questa curva in M' è

$$f_* X = \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \xi^j \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Applicando questo vettore alla funzione $g(v^i)$ otteniamo

$$\begin{aligned} f_*(X)g &= \xi^j \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial v^i} g(v^k) \\ &= \xi^j \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \frac{\partial g(v^k(u^r))}{\partial v^i} \\ &= \xi^j \frac{\partial g}{\partial u^j} = X(g \circ f). \end{aligned}$$

Introduciamo anche un'applicazione lineare da $T^*_{f(p)}(M')$ a $T^*_p(M)$. Per ogni r-forma ω' su M':

$$(f^* \omega')(X_1, \ldots, X_r) = \omega'(f_* X_1, \ldots, f_* X_r),$$

$$X_1, \ldots, X_r \in T_p(M).$$

La differenziazione esterna d commuta con f^*:

$$d(f^* \omega') = f^*(d\omega').$$

Dimostriamo il fatto che la differenziazione esterna commuta con i diffeomorfismi, usando un sistema di coordinate locale. Supponiamo di avere una p-forma che nel punto p della varietà M può essere rappresentata come

$$\tilde{\omega} = \omega_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}. \tag{10}$$

La sua derivata esterna è

$$d\tilde{\omega} = \frac{\partial}{\partial x^{[i}} \omega_{i_1 \cdots i_p]} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}. \tag{11}$$

Un diffeomorfismo f della varietà M che porta il punto P nel punto P' con le coordinate locali $x^{j'}$ trasforma la p-forma $\tilde{\omega}$ come segue:

$$f^* \tilde{\omega} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i_p'}} \omega_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1'} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p'}. \tag{12}$$

Lo stesso diffeomorfismo f induce la seguente trasformazione della (p+1)-forma $d\tilde{\omega}$ data dall'equazione (11):

$$f^* d\tilde{\omega} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial}{\partial x^{[i}} \omega_{i_1 \cdots i_p]} dx^{i'} \wedge dx^{i'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i'_p}. \tag{13}$$

La derivata esterna della forma $f^* \tilde{\omega}$ è

$$\begin{aligned} d(f^* \tilde{\omega}) &= \frac{\partial}{\partial x^{[i'}} \left[\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p]}} \omega_{i_1 \cdots i_p} \right] dx^{i'} \wedge dx^{i'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i'_p} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{[i'}} \left[\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p]}} \right] \omega_{i_1 \cdots i_p} dx^{i'} \wedge dx^{i'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i'_p} \\ &+ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^{[i}} \omega_{i_1 \cdots i_p]} dx^{i'} \wedge dx^{i'_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i'_p}. \end{aligned} \tag{14}$$

È facile vedere che la differenza tra le espressioni (13) e (14) è proporzionale alle seconde derivate antisimmetrizzate delle coordinate locali del punto P rispetto alle coordinate del punto P' : $\frac{\partial x^i}{\partial x^{[j'} \partial x^{k']}}$ che, naturalmente, spariscono. Quindi,

$$d(f^* \tilde{\omega}) = f^*(d\tilde{\omega}). \tag{15}$$

Definizione 1.28.

Ricordiamo che un diffeomorfismo da una varietà M ad un'altra varietà M' è un omeomorfismo φ tale che entrambi φ e φ^{-1} sono differenziabili. Un diffeomorfismo φ da M a se stesso induce un automorfismo φ^* dell'algebra $\mathcal{D}(M)$ di forme differenziali su M e, in particolare, un automorfismo dell'algebra $\mathcal{T}(M)$ di funzioni su M:

$$(\varphi^* f)(p) = f(\varphi(p)), \ f \in \mathcal{T}(M), \ p \in M.$$

Esso induce anche un automorfismo φ_* dell'algebra di Lie $\mathcal{X}(M)$ di campi vettoriali:

$$(\varphi_* X)_p = (\varphi_*)_q (X_q),$$

laddove $\varphi(q) = p, \ X \in \mathcal{X}(M)$.

Questi due automorfismi sono legati via

$$\varphi^*((\varphi_* X) f) = X(\varphi^* f)$$

per $X \in \mathcal{X}(M)$ e $f \in \mathcal{T}(M)$.

Davvero,

$$
\begin{aligned}
&q: \ u^1, \ldots, u^n \\
&p: \ v^1, \ldots, v^n \\
&p = \varphi(q) \\
&\varphi: \ v^i(u_j) \\
&X = \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j} \\
&\varphi_* X = \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \xi^j \frac{\partial}{\partial v_i} \\
&X(\varphi^* f) = \xi^j \frac{\partial(\varphi^* f)(u^j)}{\partial u^j} = \xi^j \frac{\partial f(v^i(u^j))}{\partial u^j} \\
&= \xi^j \frac{\partial f}{\partial v^i} \frac{\partial v^i}{\partial u^j} = \xi^j \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial v^i} f \\
&= \varphi^*((\varphi_* X) f).
\end{aligned}
$$

Definizione 1.29.

Sia X un campo vettoriale su M. Una curva $x(t)$ si chiama curva integrale di X se, per ogni valore del parametro t_0, il vettore $X_{x(t_0)}$ è tangente alla curva $x(t)$ in $x(t_0)$. Per ogni punto p_0 di M, c'è un'unica curva integrale $x(t)$ di X, definita per $|t| < \varepsilon$ per un $\varepsilon > 0$, tale che $p_0 = x(0)$. Infatti, sia $u^1, \ldots, u^n$ un sistema locale di coordinate in un intorno U di p_0 e sia $X = \sum \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j}$ in U. Allora la curva integrale è una soluzione del seguente sistema di equazioni differenziali ordinari

$$\frac{du^j}{dt} = \xi^j(u^1(t), \ldots, u^n(t)), \ j = 1, \ldots, n.$$

Definizione 1.30.

Un gruppo 1-parametrico di trasformazioni differenziabili di M è un'applicazione da $\mathbb{R} \times M$ a M, $(t,p) \in \mathbb{R} \times M \to \varphi_t(p) \in M$, che soddisfa le seguenti condizioni:
(1) per ogni $t \in \mathbb{R}, \varphi_t(P)$ è una trasformazione di M;
(2) per tutti $t, s \in \mathbb{R}$ e $p \in M$, $\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$.

Ogni gruppo 1-parametrico di trasformazioni φ_t induce un campo vettoriale X come segue. Per ogni punto $p \in M$, X_p è un vettore tangente alla curva $x(t) = \varphi_t(p)$, che si chiama orbite di p, $p = \varphi_0(p)$. L'orbite $\varphi_t(p)$ è una curva integrale di X che comincia in p.

Definizione 1.31.

Un gruppo locale 1-parametrico di trasformazioni locali è definito su un intervallo aperto $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ ed un insieme aperto U di M. Questo gruppo è un'applicazione $I_\varepsilon \times U \to M$ che soddisfa le seguenti condizioni:
(1) Per ogni $t \in I_\varepsilon, \varphi_t : p \to \varphi_t(p)$ è un diffeomorfismo di U in un insieme aperto $\varphi_t(U)$ di M;
(2) Se $t, s, t+s \in I_\varepsilon$ e se $p, \varphi_s(p) \in U$, allora $\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$.

φ_t induce un campo vettoriale definito in U.

Teorema 1.2.

Sia X un campo vettoriale su una varietà M. Per ogni punto p_0 di M, esiste un intorno U di p_0, un numero positivo ε ed un gruppo locale 1-parametrico di trasformazioni locali $\varphi_t : U \to M, t \in I_\varepsilon$, che induce X dato.

Diremo che X induce un gruppo locale 1-parametrico di trasformazioni locali φ_t in un intorno di p_0. Se esiste un gruppo globale 1-parametrico di trasformazioni di M che induce il campo X, diremo che questo X è completo. Se $\varphi_t(p)$ è definito su $I_\varepsilon \times M$ per un certo ε, allora X è completo.

Dimostrazione

Siano $u^1, \ldots, u^n$ coordinate locali in un intorno W di p_0 tale che $u^1(p_0) = \cdots = u^n(p_0) = 0$. Sia $X = \xi^i(u^1, \ldots, u^n)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)$ in W. Consideriamo il sistema di equazioni lineari differenziali ordinari:

$$\frac{df^i(t)}{dt} = \xi^i(f^1(t), \ldots, f^n(t)),\ i = 1, \ldots, n.$$

Secondo il teorema fondamentale per i sistemi di equazioni differenziali ordinari esiste un unico insieme di funzioni $f^1(t; u), \ldots, f^n(t; u)$ definito per $u = (u^1, \ldots, u^n)$ con $|u^j| < \delta_1$ e per $|t| < \varepsilon_1$, che formano una soluzione di equazioni differenziali e soddisfano le condizioni iniziali :

$$f^i(0, u) = u^i.$$

Poniamo $\varphi_t(u) = (f^1(t;u), \ldots, f^n(t;u))$ per $|t| < \varepsilon_1$ e u in $U_1 = \{u; |u^j| < \delta_1\}$. Se $|t|, |s|$ e $|t+s|$ sono minori di ε_1 ed entrambi u e $\varphi_s(u)$ sono in U_1, allora le funzioni $g^i(t) = f^i(t+s;u)$ sono soluzioni delle equazioni differenziali per le condizioni iniziali $g^i(0) = f^i(s;u)$. Quindi $g^i(t) = f^i(t; \varphi_s(u))$. Questo dimostra che $\varphi_t(\varphi_s(u)) = \varphi_{t+s}(u)$. Poiché φ_0 è la trasformazione identità di U_1, esiste $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tali che, per $U = \{u; |U^i| < \delta\}$, $\varphi_t(U) \subset U_1$ se $|t| < \varepsilon$. Allora, φ_t è un gruppo locale 1-parametrico di trasformazioni locali definite su $I_\varepsilon \times U$. Dalla costruzione è ovvio che φ_t induce il campo vettoriale dato X in U.

Teorema 1.3.

Su una varietà M compatta ogni campo vettoriale X è completo.

Dimostrazione

Per ogni punto $p \in M$, sia $U(p)$ un intorno di p e $\varepsilon(p)$ un numero positivo tale che il campo vettoriale X genera un gruppo locale 1-parametrico di trasformazioni locali φ_t su $I_{\varepsilon(p) \times U(p)}$. Poiché M è compatto, il ricoprimento aperto $\{U(p); p \in M\}$ ha un sottoricoprimento finito $\{U(p_i), i = 1, \ldots, k\}$. Sia $\varepsilon = \min\{\varepsilon(p_1), \ldots, \varepsilon(p_k)\}$. È chiaro che $\varphi_t(p)$ è definito su $I_\varepsilon \times M$ e, quindi, su $\mathbb{R} \times M$.

Teorema 1.4.

Sia φ una trasformazione di M. Se un campo vettoriale X genera un gruppo locale 1-parametrico di trasformazioni locali φ_t, allora il campo vettoriale $\varphi_* X$ genera il gruppo di trasformazioni $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$.

Dimostrazione

È chiaro che $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$ è un gruppo locale 1-parametrico di trasformazioni locali. Sia p un punto arbitrario di M e $q = \varphi^{-1}(p)$. Poiché φ_t induce X, il vettore $X_q \in T_q(M)$ è tangente alla curva $x(t) = \varphi_t(q)$ in $q = x(0)$. Da qui segue che il vettore

$$(\varphi_* X)_p = (\varphi_*)_q (X_q) \in T_p(M)$$

è tangente alla curva

$$y(t) = \varphi \circ \varphi_t(q) = \varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}(p).$$

Corollario 1.5.

Un campo vettoriale X è invariante rispetto a φ, cioè $\varphi_* X = X$, se e solo se φ commuta con φ_t.

Diamo ora una <u>interpretazione geometrica</u> della parentesi $[X, Y]$ di due campi vettoriali.

Teorema 1.6.

Siano X e Y campi vettoriali su M. Se X genera un gruppo locale 1-parametrico di trasformazioni locali φ_t, allora

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[Y_p - (\varphi_t)_* Y_p], \ p \in M.$$

Prima dimostriamo due lemmi.

Lemma 1.7.

Se $f(t, p)$ è una funzione su $I_\varepsilon \times M$, tale che $f(0, p) = 0$ per tutti $p \in M$, allora esiste una funzione $g(t, p)$ su $I_\varepsilon \times M$ tale che $f(t, p) = t \cdot g(t, p)$. Inoltre, $g(0, p) = \frac{\partial f(0,p)}{\partial t}$ per tutti $p \in M$.

Dimostrazione

È sufficiente definire

$$g(t, p) = \int_0^1 f'(ts, p) ds.$$

Davvero,

$$\int_0^1 f'(ts, p) ds = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\partial f(ts, p)}{\partial (ts)} d(ts) = \frac{1}{t} f(t, p)$$

$$f'(t, p) = g(t, p) + t g'(t, p);$$

$$f'(0,p) = g(0,p).$$

Lemma 1.8.

X generi φ_t. Per ogni funzione f su M, esiste una funzione $g_t(p) = g(t,p)$ tale che $f \circ \varphi_t = f + t \cdot g_t$ e $g_0 = Xf$ su M. La funzione $g(t,p)$ è definita per ogni $p \in M$, in $|t| < \varepsilon$ per un certo ε.

Dimostrazione

Consideriamo $f(t,p) = f(\varphi_t(p)) - f(p)$ ed applichiamo il Lemma 1.7. Allora

$$f \circ \varphi_t = f + t \cdot g_t.$$

Poi

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(\varphi_t(p)) - f(p)] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(t,p) = \lim_{t\to 0} g_t(p) = g_0(p).$$

Dimostrazione del Teorema 1.6.

Data una funzione f su M, prendiamo una funzione g_t tale che $f \circ \varphi_t = f + t \cdot g_t$ e $g_0 = Xf$ (Lemma 1.8.). Mettiamo $p(t) = \varphi_t^{-1}(p)$. Allora

$$((\varphi_t)_* Y)_p f = (Y(f \circ \varphi_t))_{p(t)} = (Yf)_{p(t)} + t \cdot (Yg_t)_{p(t)}$$

e

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to t} \frac{1}{t}[Y - (\varphi_t)_* Y]_p f \\
&= \lim_{t\to 0} [(Yf)_p - (Yf)_{p(t)}] - \lim_{t\to 0} (Yg_t)_{p(t)} \\
&= X_p(Yf) - Y_p g_0 = [X,Y]_p f.
\end{aligned}$$

Corollario 1.9.

Più generalmente

$$(\varphi_s)_*[X,Y] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(\varphi_s)_* Y - (\varphi_{s+t})_* Y]$$

per ogni valore di s.

Corollario 1.10.

Supponiamo che X e Y generino i gruppi locali 1-parametrici φ_t e ψ_s, rispettivamente. Allora $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ per ogni s e t se e solo se $[X, Y] = 0$.

È utile anche dimostrare l'affermazione del Teorema 1.6., usando un sistema di coordinate locale. Supponiamo di avere un sistema di coordinate locale x^i intorno al punto P di varietà differenziabile M. Supponiamo di avere anche due campi vettoriali X e Y. Consideriamo una curva integrale del campo vettoriale X cha passa attraverso il punto P. Sia punto P' un punto che appartiene a questa curva tale che $\varphi_t(P') = P$, laddove φ_t è un diffeomorfismo, appartenente al gruppo 1-parametrico (locale) generato dal campo vettoriale X. Le coordinate locali del punto P' $x^{i'}$ possono essere rappresentati come le funzioni delle coordinate locali del punto P: $x^{i'}(x^j)$. Le curva a cui il campo vettoriale Y è tangente nel punto P' è

$$x^{i'}(s) = x^{i'}(P') + Y^{i'}(P')s + o(s), \tag{16}$$

dove il valore $s = 0$ corrisponde al punto P' e $Y^{i^{'}}$ sono componenti del vettore Y rispetto alla base olonoma $\frac{\partial}{\partial x^{j'}}$. Il diffeomorfismo φ_t trasforma questa curva in una curva che passa attraverso il punto P:

$$x^i(s) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i\prime}}(x^{i'}(P') + Y^{i'}(P')s) + o(s) \tag{17}$$

e il campo vettoriale

$$(\varphi_t)_* Y^i(x^j) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i^{'}}} Y^{i^{'}}(x^{j^{'}}). \tag{18}$$

Per i valori del parametro t piccoli abbiamo

$$x^i = x^{i^{'}} + tX^i(x^{j^{'}}) + o(t). \tag{19}$$

Prendendo in considerazione (19), troviamo che (18) diventa

$$(\varphi_t)_* Y^i(x^j) = Y^i(x^j) + (X^i_{,j} Y^j - Y^i_{,j} X^j)t + o(t). \tag{20}$$

Finalmente otteniamo

$$\lim_{t \to 0} \frac{Y^i - (\varphi_t)_* Y^i}{t} = -X^i_{,j} Y^j + Y^i_{,j} X^j = [X, Y]^i. \tag{21}$$

1.2 Parentesi di Lie e le basi non-coordinate

Avendo un sistema di coordinate x^i è spesso conveniente scegliere $\frac{\partial}{\partial x^i}$ come una base per campi vettoriali. Tuttavia, ogni insieme linearmente indipendente di campi vettoriali può servire come una base. Non tutte le basi sono derivabili da un sistema di coordinate. Gli operatori $\frac{\partial}{\partial x^i}$ e $\frac{\partial}{\partial x^j}$ commutano per tutti i, j. Due campi vettoriali arbitrari non commutano. La commutatività tra campi vettoriali di una base è una condizione necessaria e sufficiente per essere una base di coordinate olonoma.

*****

Concludendo queso capitolo, dimostriamo che il diffeomorfismo della varietà M commuta con la parentesi di Lie di due campi vettoriali su questa varietà, cioè

$$[\varphi_*(A), \varphi_*(B)] = \varphi_*([A, B]). \tag{22}$$

Consideriamo un punto p della varietà M che in un sistema di coordinate locale ha le coordinate x^i. Supponiamo che il diffeomorfismo φ trasporta questo punto nel punto p' con le coordinate

$$x'^i = x'^i(x^j).$$

Se i campi vettoriali A e B nel punto p hanno la forma

$$A(x^j) = A^i(x^j)\frac{\partial}{\partial x^i},$$
$$B(x^j) = B^i(x^j)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

le loro curve integrali vicino a questo punto saranno

$$x^i(t) = x^i + A^i t,$$
$$x^i(s) = x^i + B^i s.$$

Il diffeomorfismo φ trasporta queste curve nel punto p', dove le loro coordinate si comportano come

$$x'^i(t) = x'^i(x^j + A^j t) = x'^i(x^j) + \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j t + o(t),$$
$$x'^i(s) = x'^i(x^j + B^j s) = x'^i(x^j) + \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} B^j s + o(s).$$

Rispettivamente, i campi vettoriali trasportati nel punto p' hanno la forma

$$\varphi_*(A)^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j \frac{\partial}{\partial x'^i}$$
$$\varphi_*(B)^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} B^j \frac{\partial}{\partial x'^i}.$$

Calcoliamo la parentesi di Lie di questi campi vettoriali nel punto p':

$$\begin{aligned}&[\varphi_*(A), \varphi_*(B)]\\&= \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j \frac{\partial}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} B^l \frac{\partial}{\partial x'^k} - \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} B^l \frac{\partial}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j \frac{\partial}{\partial x'^i}.\end{aligned}$$

Notando che

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x' i} \frac{\partial}{\partial x^j},$$

possiamo riscrivere la parentesi di Lie come

$$\begin{aligned}&[\varphi_*(A), \varphi_*(B)]\\&= \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j B^l \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^l \partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x'^k} - \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} B^l A^j \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x'^i}\\&+ \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j \frac{\partial B^l}{\partial x^r} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x'^k} - \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} B^l \frac{\partial A^j}{\partial x^r} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x'^i}.\end{aligned}$$

Ora, usando l'uguaglianza

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} = \delta^r_j,$$

possiamo riscrivere l'espressione precedente come

$$\begin{aligned}&[\varphi_*(A), \varphi_*(B)]\\&= A^j B^l \left(\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^l \partial x^j} \frac{\partial}{\partial x'^k} - \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^l \partial x^j} \frac{\partial}{\partial x'^i} \right)\\&+ \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} A^j \frac{\partial B^l}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x'^k} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} B^l \partial A^j \partial x^l \frac{\partial}{\partial x'^i}\\&= \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \left(A^j \frac{\partial B^l}{\partial x^j} - B^j \frac{\partial A^l}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x'^k}\\&= \varphi_*([A, B]).\end{aligned}$$

2 Tensori e campi tensoriali

Definizione 2.1.

Consideriamo un punto p di M. Un tensore di tipo $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è un'applicazione multilineare

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{a \text{ volte}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{b \text{ volte}} \to \mathbb{R}$$

i cui argomenti sono a 1-forme e b vettori ed il cui valore è un numero reale.

Per esempio, se F è un tensore di tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ il suo valore su 1-forme $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\sigma}$ ed i vettori v e w è

$$F(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}; v, w).$$

Come un'applicazione lineare F soddisfa l'uguaglianza

$$F(a\tilde{\omega} + b\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}; v, w) = aF(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}; v, w) + bF(\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}; v, w)$$

e similmente per gli altri argomenti.

Definizione 2.2.

Un campo tensoriale di tipo $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è una regola che prescrive un tensore ad ogni punto p di M. I vettori sono tensori di tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: loro sono funzionali lineari di 1-forme. Similmente, 1-forme sono tensori di tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una funzione scalare su una varietà viene trattata come un tensore di tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Un tensore di tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ richiede 2 argomenti. Per una $\tilde{\omega}$ fissa, $T(\tilde{\omega};\ \ )$ è una 1-forma, questa ha bisogno di un vettore per ottenere un numero reale. $T(\ \ ; v)$ è un vettore. Quindi un tensore di tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ può essere visto come un operatore lineare $V \to V$ o come un'applicazione lineare che mette in corrispondenza 1-forme a 1-forme.

Definizione 2.3.

Le componenti di un tensore sono i suoi valori, quando esso usa come gli argomenti vettori di base ed 1-forme di base:

$$T^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_m} = T(\tilde{\omega}^{i_1}, \ldots, \tilde{\omega}^{i_n}; e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}).$$

Definizione 2.4.

La contrazione di un tensore rispetto a due suoi indici (argomenti) può essere definita come

$$T_1 = \sum_i T(\ldots, \tilde{\omega}^i, \ldots; \ldots, e_i, \ldots),$$

laddove e_i sono vettori di una base e $\tilde{\omega}^i$ sono 1-forme appartenenti alla base duale.

Definizione 2.5.

Il prodotto tensoriale di un tensore T di tipo $\begin{pmatrix} N \\ N' \end{pmatrix}$ e di un tensore F di tipo $\begin{pmatrix} M \\ M' \end{pmatrix}$ è un tensore di tipo $\begin{pmatrix} N+M \\ N'+M' \end{pmatrix}$ definito come

$$\begin{aligned}&T \otimes F(\tilde{\omega}^1, \ldots, \tilde{\omega}^{N+M}; e_1, \ldots, e_{N'+M'})\\ &= T(\tilde{\omega}^1, \ldots, \tilde{\omega}^N; e_1, \ldots, e_{N'}) \cdot F(\tilde{\omega}^{N+1}, \ldots, \tilde{\omega}^{N+M}; e_{N'}, \ldots, e_{N'+M'}).\end{aligned}$$

Consideriamo vettori e tensori definiti in un punto p di M. Supponiamo che noi abbiamo una base vettoriale $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ e vogliamo invece usare un'altra base $\{e'_j, j = 1, \ldots, n\}$. Allora in T_p c'è una trasformazione lineare dalla vecchia base alla base nuova:

$$e'_j = \Lambda^i_{j'} e_i.$$

La vecchia base di 1-forme soddisfa le uguaglianze

$$\tilde{\omega}^i(e_j) = \delta^i_j.$$

Allora

$$\tilde{\omega}^i(e_{j'}) = \tilde{\omega}^i(\Lambda^k_{j'} e_k) = \Lambda^k_{j'} \delta^i_k = \Lambda^i_{j'}. \tag{23}$$

La matrice $\Lambda^i_{j'}$ ha una matrice inversa $\Lambda^{k'}_j$ tale che

$$\Lambda^{k'}_j \Lambda^j_{i'} = \delta^{k'}_{i'}, \ \Lambda^{k'}_j \Lambda^i_{k'} = \delta^i_j.$$

Moltiplicando (23) per $\Lambda^{k'}_i$, otteniamo

$$\Lambda^{k'}_i \tilde{\omega}^i(e_{j'}) = \delta^{k'}_{j'}.$$

Quindi, la nuova base di 1-forme duale alla nuova base di vettori è

$$\tilde{\omega}^{k'} = \Lambda^{k'}_i \tilde{\omega}^i.$$

Le 1-forme della base duale trasformano usando la matrice inversa.

Le componenti trasformano secondo le regole

$$V^{i'} = \tilde{\omega}^{i'}(V) = \Lambda^{i'}_j \tilde{\omega}^j(V) = \Lambda^{i'}_j V^j,$$

$$q_{k'} = \tilde{q}(e_{k'}) = \tilde{q}(\Lambda^j_{k'} e_j) = \Lambda^j_{k'} \tilde{q}(e_j) = \Lambda^j_{k'} q_j.$$

Queste regole mostrano che le componenti dei vettori e le 1-forme di base obbediscono alla stessa legge, la quale è opposta (cioè usa la matrice inversa) alla legge che governa le trasformazioni delle componenti delle 1-forme e dei vettori di base.

Queste leggi di trasformazione opposte hanno dato l'origine ai vecchi nomi "vettori covarianti" e "vettori contravarianti". Il punto di vista moderno sottolinea il fatto che nè vettori nè 1-forme cambiano a causa di una trasformazione di base: loro sono degli oggetti geometrici, che non dipendono dalle coordinate.

Consideriamo le trasformazioni di base che vengono indotte dalle trasformazioni di coordinate. Supponiamo che un insieme aperto U di una varietà M abbia un sistema di coordinate $\{x^i, i = 1, \ldots, n\}$. Introduciamo funzioni

$$y^{i'} = f^{i'}(x^1, \ldots, x^n), \quad i' = 1, \ldots, n.$$

Queste equazioni costituiscono una trasformazione di coordinate se matrice Jacobiana di derivate parziali $\frac{\partial y^{j'}}{\partial x^i}$ ha un determinante diverso da zero in U. Un punto dato p in U può essere descritto da due diversi sistemi di numeri $\{x^i\}$ o $\{y^{j'}\}$. Abbiamo anche due diverse basi di vettori $\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\right\}$ e

$$\frac{\partial}{\partial y^{j'}} = \frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Quindi,

$$\Lambda^i_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}},$$
$$\Lambda^{k'}_j = \frac{\partial y^{k'}}{\partial x^j}. \tag{24}$$

È importante capire che queste formule definiscono solo una classe ristretta di campi di trasformazione $\Lambda^{k'}_j$ in U. In ogni punto p di U, si può scegliere tutti n^2 elementi arbitrariamente ma non è così in un intorno di p, perché (24) implica che

$$\frac{\partial \Lambda^{k'}_j}{\partial x^l} = \frac{\partial \Lambda^{k'}_l}{\partial x^j},$$

una simmetria che un campo arbitrario $\Lambda^{k'}_j$ non è obbligato a rispettare.

Questa è un'altra illustrazione del fatto che non ogni base di vettori è una base di coordinate (una base olonoma).

Per alcune applicazioni matematiche serve anche un'altra definizione di tensori tramite il prodotto tensoriale di spazi vettoriali. Consideriamo due spazi vettoriali V e W. Introduciamo uno spazio vettoriale libero $R(V \times W)$ che è uno spazio vettoriale i cui elementi sono le somme formali degli elementi di $V \times W$ con coefficienti reali. Introduciamo uno sottospazio N di $R(V \times W)$ generato dagli seguenti elementi:

$$\begin{aligned}
&(v_1, w) + (v_2, w) - (v_1 + v_2, w), \\
&(v, w_1) + (v, w_2) - (v, w_1 + w_2), \\
&c \cdot (v, w) - (cv, w), \\
&c \cdot (v, w) - (v, cw).
\end{aligned}$$

Il prodotto tensoriale è lo spazio vettoriale quoziente $R(V \times W)/N$.

Analogamente, si può introdurre il prodotto tensoriale

$$\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{s \text{ volte}}.$$

Gli elementi di questo spazio vettoriale sono i tensori di tipo $\begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}$:

$$T = T^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots j_r} \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_r} \otimes e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_s}.$$

Definizione 2.6.

Se V è uno spazio vettoriale, un endomorfismo di V è un'applicazione lineare da V a sè stesso $T : V \to V$.

Definizione 2.7.

Sia T l'algebra tensoriale su uno spazio vettoriale V. Un endomorfismo D di T si chiama derivazione se esso soddisfa le seguenti condizioni:
(a) preserva il tipo, cioè D trasforma T^r_s in se stesso;
(b) $D(K \otimes L) = DK \otimes L + K \otimes DL$ (identità di Leibniz);
(c) D commuta con ogni contrazione.

Teorema 2.1.

L'algebra di Lie di derivazioni di $T(V)$ è isomorfa all'algebra di Lie degli endomorfismi di V. L'isomorfismo viene dato dalla prescrizione ad ogni derivazione la sua restrizione su V.

Dimostrazione

Una derivazione D trasforma $T^1_0 = V$ in se stesso, cioè induce un endomorfismo, che denotiamo B. È chiaro che $D \to B$ è un omomorfismo tra le algebre di Lie. Dalla regola di Leibniz e dalla linearità della derivazione segue che D trasforma ogni elemento del campo numerico $\mathbb{R}$ in zero. Allora, per $v \in V$ e $v^* \in V^*$, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= D(\langle v, v^* \rangle) = D(C(v \otimes v^*)) \\ &= C(D(v \otimes v^*)) = C(Dv \otimes v^* + v \otimes Dv^*) \\ &= \langle Dv, v^* \rangle + \langle v, Dv^* \rangle, \end{aligned}$$

laddove C significa contrazione.
Poiché $Dv = Bv, Dv^* = -B^* v^*$, laddove B^* è il trasposto di B.
Visto che T è generata da $\mathbb{R}, V$ e V^*, D è univocamente determinata tramite la sua restrizione a $\mathbb{R}, V$ e V^*. Quindi, $D \to B$ è iniettiva. Inversamente, avendo un endomorfismo B di V, definiamo $Da = 0$ per $a \in \mathbb{R}$, $Dv = Bv$ per $v \in V$ e $Dv^* = -B^* v^*$ per $v^* \in V^*$, e, poi, estendiamo D ad

una derivazione di T tramite la regola di Leibniz.

Siano $T(U)$ e $T(V)$ le algebre tensoriali sugli spazi vettoriali U e V. Se A è un isomorfismo lineare da U a V, allora il suo trasposto A^* è un isomorfismo lineare da V^* a U^* e $(A^*)^{-1}$ è un isomorfismo lineare da U^* a V^*. Generalmente, otteniamo un isomorfismo lineare da $T(U)$ a $T(V)$ che mappa $T_s^r(U)$ su $T_s^r(V)$. Questo isomorfismo, chiamato estensione di A è l'unico isomorfismo che estende A. L'unicità segue dal fatto che $T(U)$ è generato da $\mathbb{R}, U$ e U^*. Questa estensione commuta con le contrazioni.

Teorema 2.2.

C'è una biunivoca corrispondenza naturale tra gli isomorfismi lineari da uno spazio vettoriale U ad un'altro spazio vettoriale V e gli isomorfismi algebrici da $T(U)$ a $T(V)$ che preservono il tipo e commutano con le contrazioni. In particolare, il gruppo degli automorfismi di V è isomorfo al gruppo degli automorfismi dell'algebra tensoriale $T(V)$ che preservono il tipo e commutano con le contrazioni.

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che ogni isomorfismo algebrico f da $T(U)$ a $T(V)$ è indotto da un isomorfismo tra U e V, a patto che f preservi il tipo e commuta con le contrazioni. Poiché f preserva il tipo, esso mappa $T_0^1(U) = U$ in modo isomorfo su $T_0^1(V) = V$. Denotiamo la restrizione di f su U via A. Poiché f mappa ogni elemento del campo dei numeri reali $\mathbb{R} = T_0^0$ in se stesso e commuta con le contrazioni, abbiamo per ogni $u \in U$ e $u^* \in U^*$,

$$\begin{aligned}&\langle Au, fu^*\rangle = \langle fu, fu^*\rangle = C(fu \otimes fu^*)\\&= C(f(u \otimes u^*)) = f(C(u \otimes u^*)) = f(\langle u, u^*\rangle) = \langle u, u^*\rangle.\end{aligned}$$

Quindi, $fu^* = (A^*)^{-1}u^*$. Poiché l'algebra tensoriale $T(U)$ viene generata da $\mathbb{R}, U$ e U^*, f coincide con l'estensione di A.

Esempi di tensori

Esempio 2.1.

Se $v \in V$ e $v^* \in V^*$, allora $v \otimes v^*$ è un tensore di tipo (1,1). La contrazione $C : T_1^1 \to \mathbb{R}$ trasforma $v \otimes v^*$ in $\langle v, v^* \rangle$. Generalmente, un tensore K di tipo (1,1) può essere considerato come un endomorfismo lineare di V e la contrazione CK di K è, quindi, la traccia del corrispondente endomorfismo. Infatti, se $e_1, \ldots, e_n$ è una base per V e K ha le componenti K_j^i rispetto a questa base, allora l'endomorfismo corrispondente a K manda e_j a $\sum_i K_i^j e_j$. Ovviamente, la traccia di K e la contrazione CK di K sono entrambe uguali a $\sum_i K_i^i$.

Esempio 2.2.

Un prodotto interno g (tensore metrico o, semplicemente, metrica) su uno spazio vettoriale V è un tensore covariante di grado 2, che soddisfa le seguenti condizioni:
(1) $g(v, v) \geq 0$ e $g(v, v) = 0$ se e solo se $v = 0$ (positivamente definito),
(2) $g(v, v') = g(v', v)$ (simmetrico).

Esempio 2.3.

Sia K un tensore di tipo (1,1). Consideriamolo come un endomorfismo di V. Allora, l'automorfismo di $T(V)$ indotto da un automorfismo A di V mappa il tensore K nel tensore AKA^{-1}. Dall'altro lato, la derivazione di $T(V)$ indotto da un endomorfismo B di V trasforma K nel $[B, K] = BK - KB$.

3 Derivazione di Lie

Definizione 3.1.

Sia $\mathcal{I}_s^r(M)$ l'insieme di campi tensoriali di tipo (r,s) definito su M e $\mathcal{I}(M) = \sum_{s,r=0}^{\infty} \mathcal{I}_s^r(M)$. Allora $\mathcal{I}(M)$ è un'algebra sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. Se φ è una trasformazione di M, il suo differenziale φ_* dà un isomorfismo lineare tra lo spazio tangente $T_{\varphi^{-1}x}(M)$ e lo spazio tangente $T_x(M)$. Questo isomorfismo può essere esteso ad un isomorfismo dall'algebra tensoriale $T(\varphi^{-1}(x))$ all'algebra tensoriale $T(x)$, che denotiamo come $\tilde{\varphi}$. Dato un campo tensoriale K, definiamo un campo tensoriale $\tilde{\varphi}K$ tramite

$$(\tilde{\varphi}K)_x = \tilde{\varphi}(K_{\varphi^{-1}(x)}),\ x \in M.$$

In questo modo, ogni trasformazione φ di M induce un automorfismo dell'algebra $\mathcal{I}(M)$.

Definizione 3.2.

Definiamo la derivata di Lie di un campo tensoriale K rispetto ad un campo vettoriale X come segue. Per ogni t, $\tilde{\varphi}_t$ è un automorfismo dell'algebra $\mathcal{I}(M)$. Per ogni campo tensoriale K su M, definiamo

$$(L_X K)_x = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[K_x - (\tilde{\varphi}_t K)_x].$$

L'applicazione L_X da $\mathcal{I}(M)$ a se stessa che trasforma K in $L_X K$ si chiama <u>derivazione di Lie rispetto a X</u>.

Teorema 3.1.

La derivazione di Lie L_X rispetto ad un campo vettoriale X soddisfa le seguenti condizioni:
(a) L_X è una derivazione di $\mathcal{I}(M)$, cioè è lineare e soddisfa

$$L_X(K \otimes K') = (L_X K) \otimes K' + K \otimes (L_X K')$$

per tutti $K, K' \in \mathcal{I}(M)$;
(b) L_X conserva il tipo

$$L_X(\mathcal{I}_s^r(M)) \subset \mathcal{I}_s^r(M);$$

(c) L_X commuta con ogni contrazione di un campo tensoriale;
(d) $L_X f = Xf$ per ogni funzione f;
(e) $L_X Y = [X, Y]$ per ogni campo vettoriale Y.

Dimostrazione

È chiaro che L_X è lineare. Sia φ_t un gruppo 1-parametrico delle trasformazioni locali generato da X. Allora

$$L_X(K \otimes K') = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[K \otimes K' - \tilde{\varphi}_t(K \otimes K')]$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[K \otimes K' - \tilde{\varphi}_t(K) \otimes \tilde{\varphi}_t(K')]$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[K \otimes K' - \tilde{\varphi}_t(K) \otimes K')]$$
$$+ \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\tilde{\varphi}_t(K) \otimes K' - \tilde{\varphi}_t(K) \otimes \tilde{\varphi}_t(K')]$$
$$= \left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[K - (\tilde{\varphi}_t K)]\right) \otimes K'$$
$$+ \lim_{t\to 0} \left[\tilde{\varphi}_t(K) \otimes \left(\frac{1}{t}[K' - \tilde{\varphi}_t(K')]\right)\right]$$
$$= (L_X K) \otimes K' + K \otimes (L_X K').$$

Poiché $\tilde{\varphi}_t$ preserva il tipo e commuta con le contrazioni, lo stesso fa anche L_X. Se f è una funzione su M allora

$$(L_X f)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(x) - f(\varphi_t^{-1} x)]$$
$$= - \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(\varphi_t^{-1} x) - f(x)].$$

Osservando che $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ è un gruppo 1-parametrico locale generato da $_X$, vediamo che

$$L_X f = -(-X)f = Xf.$$

L'affermazione (e) è già stata dimostrata.

Definizione 3.3.

Sotto una derivazione di $\mathcal{I}(M)$, intenderemo una trasformazione di $\mathcal{I}(M)$ che soddisfa le condizioni (a), (b) e (c) del Teorema 3.1.

Sia S un campo tensoriale di tipo (1,1). Per ogni $x \in M$, S_x è un endomorfismo lineare dello spazio tangente $T_x(M)$. S_x può essere univocamente esteso ad una derivazione dell'algebra tensoriale $T(x)$ su $T_x(M)$. Per ogni campo tensoriale K, definiamo SK mediante $(SK)_x = S_x K_x, x \in M$. Allora S è una derivazione di $\mathcal{I}(M)$. Abbiamo

Teorema 3.2.

Ogni derivazione D di $\mathcal{I}(M)$ può essere univocamente rappresentata come

$$D = L_X + S,$$

laddove X è un campo vettoriale e S è un campo tensoriale di tipo (1,1).

Dimostrazione

Poiché D conserva il tipo, questo trasforma l'algebra $\mathcal{T}(M)$ in se stessa e soddisfa

$$D(fg) = (Df) \cdot g + f \cdot (Dg) \quad \text{per } f, g \in \mathcal{T}(M).$$

Allora esiste un campo vettoriale X tale che $Df = Xf$ per ogni $f \in \mathcal{T}(M)$. Ovviamente, $D - L_X$ è una derivazione D che si annulla su $\mathcal{T}(M)$. Dimostriamo, che ogni derivazione D di che si annulla su $\mathcal{T}(M)$ è indotta da un campo tensoriale di tipo (1,1). Per ogni campo vettoriale Y, DY è un campo vettoriale e, per ogni funzione f,

$$D(fY) = Df \cdot Y + f \cdot DY = f \cdot DY \quad \text{per assunzione.}$$

Allora c'è l'unico tensore di tipo (1,1) tale che $DY = SY$ per ogni campo vettoriale. Per dimostrare che D coincide con la derivazione indotta da S, è sufficiente dimostrare il

Lemma 3.3.

Due derivazioni D_1 e D_2 di $\mathcal{I}(M)$ coincidono se loro coincidono su $\mathcal{T}(M)$ e $\mathcal{X}(M)$.

Dimostrazione

Poniamo $D = D_1 - D_2$. Dobbiamo dimostrare che se una derivazione D è zero su $\mathcal{T}(M)$ e $\mathcal{X}(M)$ allora essa è zero su $\mathcal{I}(M)$.

Sia K un campo tensoriale di tipo (r, s) ed x un punto arbitrario di M. Per dimostrare che DK sparisce in x, prendiamo un intorno V di x con le coordinate $x^1, \ldots, x^n$ e presentiamo K come

$$K = \sum K^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s},$$

laddove $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $\omega^j = dx^j$.

Dimostriamo che

$$D(K = \sum K^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s}) = 0.$$

Questo seguirà dal fatto che $D\omega = 0$ per ogni 1-forma ω su M. Sia Y un campo vettoriale e

$$C : \mathcal{I}^1_1(M) \to \mathcal{T}(M)$$

la contrazione tale che

$$C(Y \otimes \omega) = \omega(Y)$$

è una funzione. Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
&0 = D(C(Y \otimes \omega)) = C(D(Y \otimes \omega)) \\
&C(DY \otimes \omega) + C(Y \otimes D\omega) \\
&= C(Y \otimes D\omega) = (D\omega)(Y).
\end{aligned}$$

Poiché questo è vero per ogni campo vettoriale Y, $D\omega = 0$.

L'insieme di tutte le derivazioni di $\mathcal{I}(M)$ costituisce un'algebra di Lie su $\mathbb{R}$ (di dimensionalità infinita) con l'operazione di parentesi definita via

$$[D, D']K = D(D'K) - D'(DK).$$

L'insieme di tutti i campi tensoriali S di tipo (1,1) costituisce una sottoalgebra di Lie delle derivazioni di $\mathcal{I}(M)$. Abbiamo dimostrato che una derivazione di $\mathcal{I}(M)$ è indotta da un campo tensoriale di tipo (1,1) se e solo se essa è uguale a zero su $\mathcal{T}(M)$. Quindi, se D è una derivazione di $\mathcal{I}(M)$ e S è un campo tensoriale di tipo (1,1), allora $[D, S]$ è zero su $\mathcal{T}(M)$, e, quindi, è indotta da un campo tensoriale di tipo (1,1). In altre parole, l'insieme di campi tensoriali di tipo (1,1) è un ideale dell'algebra di Lie delle derivazioni di $\mathcal{I}(M)$. Inoltre, l'insieme delle derivazioni di Lie $L_X, X \in \mathcal{X}(M)$ costituisce una sottoalgebra di Lie delle derivazioni di $\mathcal{I}(M)$. Questo segue dal

Teorema 3.4.

Per ogni campo vettoriale X ed ogni campo vettoriale Y, abbiamo

$$L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y].$$

Dimostrazione

Grazie al Lemma 3.3. è sufficiente dimostrare che $[L_X, L_Y]$ coincide con $L_{[X,Y]}$ su $\mathcal{T}(M)$ e $\mathcal{X}(M)$. Per $f \in \mathcal{T}(M)$, abbiamo

$$[L_X, L_Y]f = XYf - YXf = [X,Y]f = L_{[X,Y]}f.$$

Per $Z \in \mathcal{X}(M)$, abbiamo

$$\begin{aligned} [L_X, L_Y]Z &= [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] \\ &= [[X,Y],Z] = L_{[X,Y]}Z \end{aligned}$$

a causa dell'identità di Jacobi.

Teorema 3.5.
Sia K un campo tensoriale di tipo $(1,r)$ che viene interpretato come un'applicazione lineare da $\mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X}$ a $\mathcal{X}$. Per ogni campo vettoriale X avremo

$$\begin{aligned} &(L_X K)(Y_1, \ldots, Y_r) = [X, K(Y_1, \ldots, Y_r)] \\ &- \sum_{i=1}^{r} K(Y_1, \ldots, [X, Y_i], \ldots, Y_r). \end{aligned} \tag{25}$$

Dimostrazione

Abbiamo $K(Y_1, \ldots, Y_r) = C_1 \cdots C_r(Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_r \otimes K)$, laddove $C_1, \ldots, C_r$ sono le ovvie contrazioni. Usando le condizioni (a) e (c) del Teorema 3.1., abbiamo per ogni derivazione D di $\mathcal{I}(M)$,

$$D(K(Y_1, \ldots, Y_r)) = (DK)(Y_1, \ldots, Y_r) + \sum_i K(Y_1, \ldots, DY_i, \ldots, Y_r).$$

Se $D = L_X$ allora (e) del Teorema 3.1. implica la formula (25).

Teorema 3.6.

Sia φ_t un gruppo locale 1-parametrico di trasformazioni locali generato da un campo vettoriale X. Per ogni campo tensoriale K, abbiamo

$$\tilde{\varphi}_s(L_X K) = -\left(\frac{d(\tilde{\varphi}_t K)}{dt}\right)_{t=s}.$$

Corrolario 3.7.

Un campo tensoriale K è invariante respetto a φ_t per ogni t se e solo se $L_K = 0$.

Definizione 3.3.

Sia $\mathcal{D}^r(M)$ lo spazio di forme differenziali di grado r definite su M. Rispetto al prodotto esterno, $\mathcal{D}(M) = \sum_{r=0}^{n} \mathcal{D}^r(M)$ costituisce un'algebra su $\mathbb{R}$.

Definizione 3.4.

Una derivazione D graduata di grado k è un'applicazione lineare

$$D : \mathcal{D}^r(M) \to \mathcal{D}^{r+k}(M),$$

per cui la regola di Leibniz è

$$D(\omega \wedge \omega') = D\omega \wedge \omega' + (-1)^{kr} \omega \wedge D\omega', \tag{26}$$

dove $\omega \in \mathcal{D}^r(M)$.

Lo spazio di tutte le derivazioni graduate è un'algebra di Lie graduata con la parentesi graduata

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{k_1 k_2} D_2 \circ D_1. \tag{27}$$

Questa parentesi è graduatamente anticommutativa

$$[D_1, D_2] = -(-1)^{k_1 k_2} [D_2, D_1] \tag{28}$$

e soddisfa l'identità di Jacobi graduata.

$$[D_1,[D_2,D_3]] = [[D_1,D_2],D_3] + (-1)^{k_1k_2}[D_2,[D_1,D_3]]. \qquad (29)$$

Dimostriamo questo usando il calcolo diretto.

$$\begin{aligned}
&D_2(\omega\wedge\omega') = D_2\omega\wedge\omega' + (-1^{k_2r}\omega\wedge D_2\omega';\\
&D_1D_2(\omega\wedge\omega') = D_1D_2\omega\wedge\omega' + (-1^{k_1(r+k_2)}D_2\omega\wedge D_1\omega'\\
&+(-1)^{k_2r}D_1\omega\wedge D_2\omega' + (-1)^{(k_1+k_2)r}\omega\wedge D_1D_2\omega';\\
&(D_1D_2-(-1)^{k_1k_2}D_2D_1)(\omega\wedge\omega') = D_2\omega\wedge\omega' + (-1)^{k_2r}\omega\wedge D_2\omega'\\
&+(-1)^{k_2r}D_1\omega\wedge D_2\omega' + (-1)^{(k_1+k_2)r}\omega\wedge D_1D_2\omega'\\
&-(-1)^{k_1k_2}[D_2D_1\omega\wedge\omega' + (-1)^{k_2(r+k_1)}D_1\omega\wedge D_2\omega'\\
&+(-1)^{k_1r}D_2\omega\wedge D_1\omega' + (-1)^{(k_1+k_2)r}\omega\wedge D_2D_1\omega']\\
&= (D_1D_2-(-1)^{k_1k_2}D_2D_1)\omega\wedge\omega' + (-1)^{(k_1+k_2)r}(\omega\wedge(D_1D_2-(-1)^{k_1k_2}D_1D_2)\omega').
\end{aligned}$$

Quindi, abbiamo dimostrato che la parentesi di Lie graduata $(D_1D_2-(-1)^{k_1k_2}D_2D_1)$ è una derivazione graduata di grado (k_1+k_2) e soddisfa la regola di Leibniz graduta (26).

Poi

$$[D_2,D_1] = D_2D_1-(-1)^{k_1k_2}D_1D_2 = -(-1)^{k_1k_2}(D_1D_2-(-1)^{k_1k_2}D_2D_1) = -(-1)^{k_1k_2}[D_1,D_2].$$

Quindi la parentesi di Lie graduata (27) è graduatamente antisimmetrica, cioè soddisfa l'identità (28).

Ora vogliamo verificare l'identità di Jacobi graduata (29). Calcoliamo le doppie parentesi di Lie graduate:

$$\begin{aligned}
&[D_1,[D_2,D_3]] = D_1(D_2D_3-(-1)^{k_2k_3}D_3D_2) - (-1)^{(k_2+k_3)k_1}(D_2D_3-(-1)^{k_2k_3}D_3D_2)D_1\\
&= D_1D_2D_3 - (-1)^{k_2k_3}D_1D_3D_2 - (-1)^{(k_2+k_3)k_1}D_2D_3D_1\\
&+(-1)^{k_2k_3+k_1(k_2+k_3)}D_3D_2D_1, \qquad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[[D_1,D_2],D_3] = D_1D_2D_3 - (-1)^{k_1k_2}D_2D_1D_3\\
&-(-1)^{k_3(k_1+k_2)}D_3D_1D_2 + (-1)^{k_3(k_1+k_2)+k_1k_2}D_3D_2D_1, \qquad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(-1)^{k_1k_2}[D_2,[D_1,D_3]] = (-1)^{k_1k_2}D_2D_1D_3 - (-1)^{k_1(k_2+k_3)}D_2D_3D_1\\
&-(-1)^{k_1k_2+k_2(k_1+k_3)}D_1D_3D_2 + (-1)^{k_1k_2+k_1k_3+k_2(k_1+k_3)}D_3D_1D_2. \qquad (32)
\end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni (30), (31) e (32) nella formula (29), vediamo che l'identità di Jacobi graduata viene rispettata.

Notiamo che la differenziazione esterna d è una derivazione graduata di grado 1.

Teorema 3.8.

Per ogni campo vettoriale X, L_X è una derivazione graduata di grado 0 di $\mathcal{D}(M)$ che commuta con la differenziazione esterna d. Inversamente, ogni derivazione di grado 0 che commuta con d è uguale a L_X per un certo campo vettoriale X.

Dimostrazione

Osserviamo che L_X commuta con l'antisimmetrizzazione. Questo segue immediatamente dalla formula

$$(L_X\omega)(Y_1,\ldots,Y_r) = X(\omega(Y_1,\ldots,Y_r))$$
$$-\sum_i \omega(Y_1,\ldots,[X,Y_i],\ldots,Y_r),$$

la cui dimostrazione è la stessa come nel Teorema 3.5. Quindi,

$$L_X(\omega\wedge\omega') = L_X(A(\omega\otimes\omega')) = A(L_x(\omega\otimes\omega'))$$
$$= A(L_X\omega\otimes\omega') + A(\omega\otimes L_X\omega')$$
$$= L_X\omega\wedge\omega' + \omega\wedge L_X\omega'.$$

Per dimostrare che L_X commuta con d, osserviamo che per ogni trasformazione φ di M, $\tilde{\varphi}\omega = (\varphi^{-1})^*\omega$, e , quindi, $\tilde{\varphi}$ commuta con d. Sia φ_t un gruppo locale 1-parametrico di trasformazioni locali generato da X. Da $\tilde{\varphi}_t(d\omega) = d(\tilde{\varphi}_t\omega)$ e la definizione di $L_X\omega$ segue che $L_X(d\omega) = d(L_X\omega)$ per ogni $\omega\in\mathcal{D}(M)$.

Inversamente, sia D una derivazione di grado 0 di $\mathcal{D}(M)$ che commuta con d. Poiché D trasforma $\mathcal{D}^0(M) = \mathcal{T}(M)$ in se stessa, D è derivazione di $\mathcal{T}(M)$ e, quindi, c'è un campo vettoriale X tale che $Df = Xf$ per ogni $f\in\mathcal{T}(M)$. Introduciamo $D' = D - L_X$. Allora D' è una derivazione di $\mathcal{D}(M)$ tale che $D'f = 0$ per ogni $f\in\mathcal{T}(M)$. Ora, per dimostrare che $D' = 0$, è sufficiente dimostrare che $D'\omega = 0$ per ogni 1-forma ω. È sufficiente dimostrare che $D'\omega = 0$ quando ω ha forma $\omega = fdg$, laddove $f, g \in \mathcal{T}(M)$ (perché localmente ω ha forma $\sum f_i dx^i$ rispetto ad un sistema di coordinate locale $x^1, \ldots, x^n$). Sia $\omega = fdg$. Da $D'f = 0$ e $D'(dg) = d(D'g) = 0$, otteniamo

$$D'(\omega) = (D'f) \cdot dg + f \cdot D'(dg) = 0.$$

Definizione 3.5.

Per ogni campo vettoriale X, definiamo una derivazione graduata i_X, che si chiama prodotto interno rispetto a X, di grado -1 di $\mathcal{D}(M)$ tale che
(a) $i_X f = 0$, per ogni $f \in \mathcal{D}^0(M)$;
(b) $i_X \omega = \omega(X)$ per ogni $\omega \in \mathcal{D}^1(M)$.

Come sappiamo, tutte le derivazioni graduate sono definite via loro azione su $\mathcal{T}(M)$ e $\mathcal{D}^1(M)$. Consideriamo ogni r-forma come un elemento di $\mathcal{I}_r^0(M)$ e definiamo $i_X\omega = C(X \otimes \omega)$. In altre parole

$$(i_X\omega)(Y_1, \ldots, Y_{r-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{r-1}) \text{ per } Y_i \in \mathcal{X}(M).$$

La formula graduata di Leibniz

$$i_X(\omega \wedge \omega') = i_X\omega \wedge \omega' + (-1)^r \omega \wedge i_X\omega'$$

viene verificata direttamente.

Poiché

$$(i_X^2\omega)(Y_1, \ldots, Y_{r-2}) = \omega(X, X, Y_1, \ldots, Y_{r-2}) = 0,$$

abbiamo

$$i_X^2 = 0.$$

Analogamente

$$i_X i_Y + i_Y i_X = 0.$$

Teorema 3.9.

Abbiamo le seguenti relazioni tra d, L_X e i_X:
(a) $L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$ per ogni campo vettoriale X;
(b) $[L_X, i_Y] = i_{[X,Y]}$ per qualsiasi coppia di campi vettoriali X e Y.

Dimostrazione

$d \circ i_X + i_X \circ d$ è una derivazione di grado 0. Essa commuta con d perché $d^2 = 0$. Quindi, essa è uguale ad una differenziazione di Lie rispetto ad un certo campo vettoriale. Per dimostrare che questo campo è uguale a X, basta verificare che $L_X f = (d \circ i_X + i_X \circ d)f$ per ogni funzione f. Questo è ovvio perché $L_X f = Xf$ e

$$(d \circ i_X + i_X \circ d)f = i_X \circ df = df(X) = Xf.$$

Per dimostrare l'affermazione (b) notiamo che $[L_X, i_Y]$ è una derivazione graduata di grado -1 e che entrambi $[L_X, i_Y]$ e $i_{[X,Y]}$ sono uguali a zero su $\mathcal{T}(M)$. Ora, è sufficiente dimostrare che loro hanno lo stesso effetto su ogni 1-forma ω. Sappiamo che

$$(L_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]). \tag{33}$$

Davvero

$$\begin{aligned}
&L_X(\omega(Y)) = X(\omega(Y)) = L_X(C(Y \otimes \omega)) \\
&= CL_X(Y \otimes \omega)) = C(L_X Y \otimes \omega + Y \otimes L_X\omega)) \\
&= \omega([X, Y]) + (L_X\omega)(Y)
\end{aligned}$$

da qui segue la formula (33).

Quindi,

$$\begin{aligned}
&[L_X, i_Y]\omega = L_X(\omega(Y)) - i_Y(L_X\omega) \\
&= X(\omega(Y)) - (L_X\omega)(Y) = \omega([X, Y]) = i_{[X,Y]}\omega.
\end{aligned}$$

Teorema 3.10.

Se ω è una r-forma, allora

$$\begin{aligned}
d\omega(X_0, X_1, \ldots, X_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i X_i(\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_r)) \\
+ \sum_{0 \le i < j \le r} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_o, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_r),
\end{aligned}$$

laddove il simbolo ˆ significa che il termine è omesso.

Per i casi $r = 1, r = 2$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
&r = 1\\
&(d\omega)(X, Y) = \{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\},\\
&r = 2\\
&d\omega(X, Y, Z) = \{X(\omega(Y, Z) + Y(\omega(Z, X)) + Z(\omega(X, Y))\\
&-\omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y)\}.
\end{aligned}
$$

Dimostrazione

Usiamo il metodo dell'induzione matematica. Per $r = 0, \omega$ è una funzione e $d\omega(X_0) = X_0\omega$ è, quindi, la formula presentata è corretta. Assumiano che la formula sia corretta per $r - 1$. Sia ω una r-forma. Allora,

$$
\begin{aligned}
&d\omega(X, X_1, \ldots, X_r) = (i_X \circ d\omega)(X_1, \ldots, X_r)\\
&= (L_X\omega)(X_1, \ldots, X_r) - (d \circ i_X\omega)(X_1, \ldots, X_r).\\
&(L_X\omega)(X_1, \ldots, X_r) = X(\omega(X_1, \ldots, X_r))\\
&-\sum_{i=1}^{r} \omega(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_r).
\end{aligned}
$$

Poiché $i_X\omega$ è una $(r - 1)$-forma, abbiamo, secondo l'assunzione di induzione :

$$
\begin{aligned}
&(d \circ i_X\omega)(X_1, \ldots, X_r) = \sum_{i=1} (-1)^{i-1} X_i(i_X\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_r))\\
&+ \sum_{1 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} (i_X\omega)([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_r)\\
&= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_r))\\
&- \sum_{1 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_r).
\end{aligned}
$$

L'affermazione del nostro teorema segue da queste tre formule.

4 Gruppi di Lie

Definizione 4.1.

Un gruppo di Lie è un insieme G che è simultaneamente una varietà differenziabile ed un gruppo tale che la sua struttura di gruppo è differenziabile. Questo significa che le due applicazioni

$$G \times G \to G$$
$$(g, g') \to gg'$$

e

$$G \to G$$
$$g \to g^{-1}$$

sono differenziabili.

L'insieme G eredita dalla sua struttura di varietà tali proprietà quali dimensionalità, compattezza, connettività ecc. Dalla sua struttura di gruppo, un gruppo di Lie eredita tali aggettivi quali abeliano, semplice, nilpotente ecc. Denotiamo l'elemento neutro del gruppo di Lie come e, allora G^e è una componente connessa di G, che contiene e. L'insieme G^e è un sottogruppo di Lie con la stessa dimensionalità di G.

Esempio 4.1.

Ci sono solo due diversi gruppi di Lie connessi unidimensionali: il primo è $\mathbb{R}$ con la sua struttura additiva. È non-compatto e semplicemente connesso. Il secondo gruppo è la circonferenza $S^1 := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ con la sua struttura di gruppo moltiplicativa. Notiamo che

$$S^1 = U(1) = SO(2).$$

È compatto e non è semplicemente connesso. Entrambi i gruppi sono abeliani. Ogni gruppo di Lie abeliano connesso è un prodotto cartesiano di copie di questi due gruppi.

Esempio 4.2.

Il gruppo GL_n lineare generale è un insieme di matrici $n \times n$ reali con determinante diverso da zero. Esso contiene due sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^{n^2}$, le matrici con un determinante positivo o negativo. GL_n ha dimensionalità n^2, non è compatto, non è connesso, è nonabeliano (se $n \geq 2$). La componente connessa del elemento neutro è GL_n^+.

Il gruppo speciale ortogonale $SO(n)$ è un sottogruppo di GL_n, che contiene le matrici ortogonali γ,

$$\gamma^T \gamma = 1$$

con il determinante uguale a 1. Il gruppo $SO(n)$ è una varietà di dimensionalità $\frac{1}{2}n(n-1)$, esso è un sottogruppo massimale compatto di GL_n^+. È connesso, ma non è semplicemente connesso.

Esempio 4.3.

I gruppi speciali unitari $SU(n)$ consistono di matrici $n \times n$ con i coefficienti complessi tali che

$$U^+ U = 1,$$

ed hanno il determinante uguale a 1. Sottolineamo che $SU(n)$ è un gruppo di Lie reale, un sottogruppo di GL_{2n}. Ha la dimensionalità $n^2 - 1$, è compatto e semplicemente connesso.

Come una varietà, $SU(2)$ coincide con S^3. Un elemento di $SU(2)$ è

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

L'unitarietà significa che

$$\begin{aligned} \bar{a}a + \bar{c}c &= 1, \\ \bar{b}b + \bar{d}d &= 1, \\ \bar{a}b + \bar{c}d &= 0. \end{aligned}$$

La condizione sul determinante è

$$ad - bc = 1.$$

Queste quattro equazioni guadratiche sono equivalenti a

$$\begin{aligned} \bar{a}a + \bar{c}c &= 1, \\ b &= -\bar{c}, \\ d &= \bar{a}. \end{aligned}$$

La forma generale di una matrice di $SU(2)$ è

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}, \ x_i \in \mathbb{R},$$

con

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1.$$

Dunque, abbiamo costruito un diffeomorfismo da $SU(2)$ a S^3.

Definizione 4.2.

Siano G un gruppo di Lie, M una varietà. Una rappresentazione di G su M è un'applicazione differenziabile

$$\begin{aligned} &G \times M \to M \\ &(g, x) \to \rho_g x \end{aligned}$$

tale che per ogni elemento di gruppo g:

$$\rho_g : M \to M$$

è un diffeomorfismo che soddisfa

$$\begin{aligned} &\rho_e = idM \\ &\rho_g \circ \rho_{g'} = \rho_{gg'}. \end{aligned}$$

Alcuni autori riservano la parola rappresentazione per il caso lineare. In generale, la rappresentazione si chiama realizzazione, azione o azione a sinistra. Per ogni punto x in M definiamo l'applicazione

$$\begin{aligned} &bit_x : G \to M \\ &g \to bit_x g := \rho_{g^{-1}} x. \end{aligned}$$

In particolare, $bit_x e = x$.

Definizione 4.3.

L'orbite di x è l'immagine di bit_x:

$$orbit(x) := bit_x(G),$$

cioè l'orbite di x consiste di tutti i punti di M che possono essere raggiunti da x tramite una trasformazione del gruppo G.

Definizione 4.4.

La rappresentazione si chiama transitiva se M contiene un'orbite sola. Questo significa che qualsiasi due punti x e y di M sono legati mediante un elemento del gruppo G:

$$y = \rho_g x.$$

Definizione 4.5.

Una rappresentazione si chiama fedele (o efficace) se l'omomorfismo $g \to \rho_g$ è iniettivo. Questo significa che ogni elemento di G diverso da e sposta almeno un punto x di M.

Definizione 4.6.

Una rappresentazione si chiama libera se solo ρ_e ha un punto fisso. Naturalmente, una rappresentazione libera è anche fedele.

Definizione 4.7.

Per un punto x dato di M, definiamo il gruppo di isotropia

$$I(x) := \{g \in G | \rho_g x = x\}$$

come un sottogruppo di G, che contiene gli elementi che lasciano x fisso. Una rappresentazione è libera se e solo se tutti i suoi gruppi di isotropia sono triviali: $I(x) = \{e\}$.

La rappresentazione di $SO(3)$ su S^2 è transitiva, fedele e non libera. Tutti i suoi gruppi di isotropia sono $SO(2)$.

Definiamo ora alcune rappresentazioni di un gruppo di Lie su se stesso: $M = G$.

Definizione 4.8.

Definiamo le traslazioni a sinistra L_g:

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,h) &\to L_g h := gh, \end{aligned}$$

dove g agisce su h mediante la moltiplicazione a sinistra. Questa rappresentazione è transitiva e libera.

Un'altra rappresentazione di G su se stesso è data dagli automorfismi interni

$$\begin{aligned} &G \times G \to G \\ &(g,h) \to aut_g h := ghg^{-1}. \end{aligned}$$

Notiamo che $I(e) = G$.

Definiamo le traslazioni a destra :

$$R_g h := hg.$$

Loro commutano con le traslazioni a sinistra e

$$aut_g = L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g.$$

Definizione 4.9.

Una rappresentazione ρ si chiama lineare se la varietà dove essa opera è uno spazio vettoriale e tutti i diffeomorfismi ρ_g sono lineari. Nessuna rappresentazione lineare è transitiva e chiamiamo una rappresentazione lineare irreducibile se V non contiene nessuno sottospazio invariante W,

$$\rho_g W \subset W \text{ per tutti } g \in G,$$

che è nontriviale:$W \neq V, W \neq \{0\}$.

Definizione 4.10.

Un campo vettoriale A su un gruppo di Lie G si chiama invariante a sinistra se esso è invariante rispetto a tutte le traslazioni a sinistra:

$$L_g(A(h)) = A(gh) \text{ per tutti } g \in G.$$

I campi vettoriali invarianti formano una sottoalgebra di Lie $\tilde{g}$ dell'algebra di Lie di campi vettoriali. Essa è finitodimensionale

$$\dim \tilde{g} = \dim G.$$

Davvero, ogni campo vettoriale invariante è definito univocamente via il suo valore $A(e) \in T_eG$ nell'elemento neutro. Abbiamo

$$A(g) = L_g A(e).$$

Se d è la dimensionalità di G e $A_1(e), \ldots, A_d(e)$ è una base di T_eG, allora i campi vettoriali invarianti corrispondenti sono una base di G. L'algebra di Lie descrive il gruppo di Lie solo localmente, intorno all'elemento neutro.

Discutiamo in alcuni dettagli l'esempio del gruppo GL_n. Notiamo che la maggioranza di gruppi di Lie hanno rappresentazioni lineari fedeli e, quindi, sono sottogruppi di certi GL_n. Essendo un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$, GL_n ha le coordinate globali. Le coordinate di un certo elemento $g \in GL_n$ sono gli elementi di una matrice $x^{ij}(g) \in \mathbb{R}$. In particolare,

$$x^{ij}(e) = \delta^{ij}.$$

Un vettore tangente $A(e) \in T_eG$ può essere rappresentato come

$$A(e) = \sum_{i_1,i_2=1}^{n} a^{i_1 i_2} \frac{\partial}{\partial x^{i_1 i_2}}\bigg|_e .$$

I numeri $a^{i_1 i_2}$ formano una matrice costante. La curva integrale, corrispondente al vettore $A(e)$ è

$$x^{ij}(t) = \delta^{ij} + a^{ij} t, \tag{34}$$

laddove t è il parametro della curva. I punti della curva (34) si spostano sotto l'azione dell'elemento $g \in GL_n$ a sinistra come

$$L_g x^{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} x^{ik}(g) x^{kj}(t) = x^{ij}(g) + \sum_{k=1}^{n} x^{ik}(g) a^{kj} t.$$

Quindi, il campo vettoriale invariante nel punto g è

$$A(g) = \sum_{k,i,j=1}^{n} x^{ik}(g) a^{kj} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}\bigg|_g .$$

Calcoliamo la parentesi di Lie di due campi vettoriali invarianti A e B:

$$\begin{aligned}
[A, B] &= \sum_{k,i_1,i_2=1}^{n} x^{i_1 k} a^{k i_2} \frac{\partial}{\partial x^{i_1 i_2}} \sum_{l,j_1,j_2=1}^{n} x^{j_1 l} b^{l j_2} \frac{\partial}{\partial x^{j_1 j_2}} - (a \leftrightarrow b) \\
&= \sum_{k,l,i_1,i_2,j_1,j_2}^{n} x^{i_1 k} a^{k i_2} \delta^{j_1 i_1} \delta^{i_2 l} b^{l j_2} \frac{\partial}{\partial x^{j_1 j_2}} - (a \leftrightarrow b) \\
&= \sum_{i_1,i_2,k,l}^{n} x^{i_1 k} (a^{kl} b^{l i_2} - b^{kl} a^{l i_2}) \frac{\partial}{\partial x^{i_1 i_2}}.
\end{aligned}$$

Abbiamo visto che $[A, B]$ è un campo vettoriale invariante. La corrispondenza $A \to a^{i_1 i_2}$ che trasforma le parentesi di Lie di campi vettoriali invarianti nei commutatori di matrici è un isomorfismo tra le algebre di Lie.

4.1 Relazioni tra un gruppo di Lie e la sua algebra di Lie

Una rappresentazione di un gruppo di Lie G su una varietà M è un omomorfismo da G a $Diff(M)$-l'insieme di tutti i diffeomorfismi di M. Una rappresentazione dell'algebra di Lie $\tilde{g}$ su M è un omomorfismo dall'algebra di Lie, la versione infinitesimale di G, a $vect(M)$-l'insieme di tutti i campi vettoriali su M – la versione infinitesimale di $Diff(M)$.

Un esempio importante di una rappresentazione lineare di un gruppo di Lie G è la rappresentazione aggiunta. Essa agisce sullo spazio vettoriale T_eG (che viene identificato con l'algebra di Lie $\tilde{g}$) mediante

$$\begin{aligned}
&Ad : G \to GL(T_eG) \\
&g \to Ad_g \\
&Ad_g : T_eG \to T_eG \\
&A(e) \to aut_g(A(e)).
\end{aligned}$$

La rappresentazione lineare corrispondente di $\tilde{g}$ su se stessa è anche chiamata rappresentazione aggiunta:

$$\begin{aligned} &ad_A : \tilde{g} \to \tilde{g} \\ &ad_A B = [A, B]. \end{aligned}$$

Teorema 4.1.

Sia G un gruppo di Lie, $\tilde{g}$ la sua algebra di Lie. C'è una corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi di Lie connessi e le sottoalgebre di Lie di $\tilde{g}$.

Corollario 4.2.

Per ogni $A \in \tilde{g}$ c'è un sottogruppo 1-parametrico

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to G \\ \tau &\to g_\tau \\ g_0 &= e \\ g_{\tau+\sigma} &= g_\tau g_\sigma \end{aligned}$$

tale che g è una curva integrale con il vettore tangente A nel punto g_τ.

Definizione 4.11.

Definiamo la mappa esponenzionale:

$$\begin{aligned} &\tilde{g} \to G \\ &A \to \exp A := g_{\tau=1}. \end{aligned}$$

Localmente, la mappa esponenziale è un diffeomorfismo

$$g_\tau = \exp \tau A.$$

Data un'algebra di Lie $\tilde{g}$ esiste un numero infinito di gruppi di Lie non-isomorfi, la cui algebra di Lie è $\tilde{g}$.

Teorema 4.3.

Sia $\tilde{g}$ un'algebra di Lie finito-dimensionale. Esiste uno e solo uno gruppo di Lie semplicemente connesso G con l'algebra di Lie $Lie(G) = \tilde{g}$. Per ogni altro gruppo di Lie H connesso con $Lie(H) = \tilde{g}$, esiste un omomorfismo di gruppo $\varphi : G \to H$ il cui nucleo è un sottogruppo discreto di G.

Definizione 4.12.

Per un gruppo di Lie connesso H, un gruppo di Lie semplicemente connesso che ha la stessa algebra di Lie si chiama gruppo di rivestimento universale.

Esempio 4.4.

Per il gruppo $U(1)$, il gruppo di rivestimento universale è $\mathbb{R}$. L'omomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to U(1)$ è $\varphi(g) = \exp 2\pi i g$, il cui nucleo è $\mathbb{Z}$ - l'anello dei numeri interi.

4.2 La forma di Maurer-Cartan

Definizione 4.13

Una forma differenziale φ su un gruppo di Lie G si chiama invariante a sinistra se quella è invariante rispetto a tutte le traslazioni a sinistra.

Definizione 4.14.

Siano $A_1, \ldots, A_d$ campi vettoriali invarianti, linearmente indipendenti. Denotiamo via

$$\zeta^1, \ldots, \zeta^d \in \lambda^1 G$$

la base duale di 1-forme

$$\zeta^i(A_j) = \delta^i_j.$$

Le forme ζ^i si chiamano forme di Maurer-Cartan. Poiché la differenziazione esterna commuta con i diffeomorfismi, le 2-forme $d\zeta^i$ sono anche invarianti e possono essere espanse come

$$d\zeta^i = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} f^i_{kl}\zeta^k \wedge \zeta^l. \tag{35}$$

Teorema 4.4.

I numeri f^i_{kl} nella formula (35) sono le costanti di struttura dell'algebra di Lie $\tilde{g}$:

$$[A_k, A_l] = \sum_i f^i_{kl} A_i.$$

Dimostrazione

Davvero,

$$\begin{aligned} & d\zeta^i(A_k, A_l) = i_{A_l} i_{A_k} d\zeta^i \\ & = i_{A_l}(L_{A_k}\zeta^i - d i_{A_k}\zeta^i) \\ & = L_{A_k} i_{A_l}\zeta^i - i_{[A_k, A_l]}\zeta^i \\ & = -\sum_j f^j_{kl}\zeta^i(A_j) = -f^i_{kl}. \end{aligned}$$

L'identità

$$d^2\zeta^i = 0$$

è equivalente all'identità di Jacobi espressa in termini delle costante strutturali.

Davvero, l'equazione di Maurer-Cartan è

$$d\zeta^i = -\frac{1}{2} f^i_{kl}\zeta^k \wedge \zeta^l.$$

Applicando a questa equazione la differenziazione esterna d, avremmo

$$\begin{aligned} 0 = d^2\zeta^i & = -\frac{1}{2} f^i_{kl} d\zeta^k \wedge \zeta^l + \frac{1}{2} f^i_{kl}\zeta^k \wedge d\zeta^l \\ & = \frac{1}{4} f^i_{kl} f^k_{rs}\zeta^r \wedge \zeta^s \wedge \zeta^l - \frac{1}{4} f^i_{kl} f^l_{rs}\zeta^k \wedge \zeta^r \wedge \zeta^s. \end{aligned}$$

Cambiando i ruoli degli indici k e l nell'ultimo termine e usando l'antisimmetria del prodotto esterno di tre 1-forme, otteniamo

$$f^k_{rs} f^i_{kl}\zeta^l \wedge \zeta^r \wedge \zeta^s = 0$$

da qui segue che

$$f^k_{rs} f^i_{kl} + f^k_{sl} f^i_{kr} + f^k_{lr} f^i_{ks} = 0. \tag{36}$$

Dall'altro lato

$$\begin{aligned} 0 & = [A_r, [A_s, A_l]] + [A_s, [A_l, A_r]] + [A_l, [A_r, A_s]] \\ & = -f^k_{sl} f^i_{kr} A_i - f^k_{lr} f^i_{ks} A_i - f^k_{rs} f^i_{kl} A_i, \end{aligned}$$

che dà la stessa relazione (36) tra le costanti di struttura.

L'algebra di Lie è univocamente caratterizzata dalle forme di Maurer-Cartan insieme all'equazione (35) che si chiama equazione di struttura di Maurer-Cartan.

Ripetiamo questa costruzione in un modo independente dalla base. Definiamo la forma ζ di Maurer-Cartan come 1-forma su G con valori in $\tilde{g}$, intesa come lo spazio tangente al gruppo di Lie nel elemento neutro T_eG.;

$$\zeta \in \Lambda^1(G, \tilde{g})$$

tale che essendo applicata al campo vettoriale invariante $A(g)$ nel punto g, essa produce lo stesso campo nel punto neutro e:

$$\zeta = A_i(e)\zeta^i(g)$$

Allora, l'equazione di struttura di Maurer-Cartan ha la forma

$$d\zeta = -\frac{1}{2}[\zeta, \zeta],$$

laddove

$$[\zeta, \zeta] = [A_i, A_j]\zeta^i \wedge \zeta^j.$$

Troviamo la forma di Maurer-Cartan per il gruppo GL_n. Un campo vettoriale, appartenente all'algebra di Lie di questo gruppo è

$$A(g) = \sum_{i_1, i_2, k} x^{i_1 k}(g) a^{k i_2} \frac{\partial}{\partial x^{i_1 i_2}}.$$

Nel punto $g = e$ esso è

$$A(e) = \sum_{i_1 i_2} a^{i_1 i_2} \frac{\partial}{\partial x^{i_1 i_2}}\Big|_e.$$

Cerchiamo la forma di Maurer-Cartan come

$$\zeta(g) = \sum_{i_1, i_2, j_1 j_2} \frac{\partial}{\partial x^{i_1 i_2}}\Big|_e \zeta^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}(g) dx^{j_1 j_2},$$

laddove i coefficienti $\zeta^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}(g)$ debbono essere scelti in tale modo che si verifichi l'uguaglianza

$$\zeta(g)A(g) = A(e).$$

Una sostituzione diretta mostra che la forma cercata dei coefficienti $\zeta^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}(g)$ è

$$\zeta^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}(g) = x^{j_1 i_1}(g^{-1})\delta^{j_2}_{i_2}.$$

Esempio 4.5.

Consideriamo il gruppo $SU(2)$ che è il gruppo universale di rivestimento del gruppo $SO(3)$. Questi gruppi hanno le algebre di Lie isomorfe. Una base di $SO(3)$ è

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che rappresentano rotazioni infinitesimali intorno alle assi x^1, x^2 e x^3. Le costanti di struttura sono

$$[T_a, T_b] = \varepsilon_{abc} T_c.$$

L'algebra di Lie reale $su(2)$ contiene matrici complesse 2×2, antihermitiane e con la traccia uguale a zero. Una base conveniente è $\tau_a = -\frac{1}{2} i\sigma_a,\ a = 1, 2, 3,$ laddove σ_a sono le matrici di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le relazioni di commutazione sono

$$[\tau_a, \tau_b] = \varepsilon_{abc}\tau_c,$$

quindi, $so(3)$ e $su(2)$ sono isomorfe. La varietà di $SU(2)$ è S^3, cioè semplicemente connessa. Il gruppo $SO(3)$ è connesso, ma non è semplicemente connesso. Costruiamo l'omomorfismo

$$\varphi : SU(2) \to SO(3).$$

Introduciamo una funzione ausiliaria:

$$\begin{aligned} & f : \mathbb{R}^3 \to su(2) \\ & v = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to x^j \tau_j = -\frac{1}{2} i \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sia g una matrice di $SU(2)$. Allora definiamo $\varphi(g)$ tramite

$$\varphi(g)v := f^{-1}(gf(v)g^{-1}).$$

Per tutti v la matrice $gf(v)g^{-1}$ è nel $su(2)$ e $\varphi(g)$ è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ a se stesso. Per mostrare che questo è davvero una rotazione, usiamo

$$\det f(v) = \frac{1}{4}|v|^2$$

e verifichiamo che $\varphi(g)$ preserva la lunghezza:

$$|\varphi(g)v|^2 = 4\det(gf(v)g^{-1}) = 4\det f(v) = |v|^2.$$

Di più, $\varphi(g)$ preserva l'orientamento, e, quindi, è un elemento di $SO(3)$.

L'applicazione φ è un omomorfismo suriettivo. Tuttavia, esso non è iniettivo. Per trovare il suo nucleo cerchiamo tutti $g \in SU(2)$ tali che $\varphi(g)v = v$ per tutti i vettori v. Questo è equivalente a

$$gf(v)g^{-1} = f(v)$$

o

$$g\tau = \tau g$$

per tutti $\tau \in su(2)$. Quindi g può essere e o $-e$ e φ è due a uno:

$$\varphi(g) = \varphi(-g).$$

4.3 Esponenziazione di campi vettoriali

Consideriamo una varietà differenziabile ed un campo vettoriale $Y = \frac{d}{d\lambda}$, laddove λ è il parametro della corrispondente curva integrale. Allora le coordinate di due punti della varietà $x^i(\lambda_0)$ e $x^i(\lambda_0 + t)$ sono legate mediante la seria di Taylor

$$\begin{aligned} x^i(\lambda_0 + t) &= x^i(\lambda_0) + t\left(\frac{dx^i}{d\lambda}\right)_{\lambda_0} + \frac{1}{2}t^2\left(\frac{d^2x^i}{d\lambda}\right)_{\lambda_0} + \cdots \\ &= \left(1 + t\frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2}t^2\frac{d^2}{d\lambda^2} + \cdots\right) x^i\Big|_{\lambda_0} \\ &= \exp\left(t\frac{d}{d\lambda}\right) x^i\Big|_{\lambda_0}. \end{aligned}$$

Nel caso di un gruppo di Lie si scrive spesso

$$g_V(t) = \exp(tV)|_e, \tag{37}$$

laddove V è un elemento dell'algebra di Lie del gruppo di Lie. Che cosa significa questa uguaglianza ? Gli elementi del gruppo di Lie sono gli elementi di una varietà mentre gli elementi dell'algebra di Lie sono campi vettoriali. Il punto è che gli elementi del gruppo di Lie hanno una "natura doppia". Loro sono i punti di una varietà differenziabile e nello stesso tempo sono i diffeomorfismi di questa varietà. La formula (37) è la formula che connette il cambiamento di una funzione sulla varietà ottenuto tramite l'azione dell'esponenziale dell'operatore differenziale rappresentato da un campo vettoriale e il cambiamento della stessa funzione a causa del diffeomorfismo, indotto dall'azione a sinistra dell'elemento del gruppo g.

Ora possiamo costruire l'omomorfismo $SU(2) \to SO(3)$, usando l'esponenziazione. Nel gruppo $SU(2)$ l'elemento dell'algebra di Lie τ_1 ha l'esponenziale

$$\begin{aligned}
&\exp(t\tau_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&+\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{2}\right)^3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

L'elemento T_1 dell'algebra di Lie di $SO(3)$ ha l'esponenziale

$$\begin{aligned}
&\exp(sT_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&+\frac{1}{2!}s^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}s^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & \sin s & \cos s \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Se stabiliamo una corrispondenza naturale

$$\pi : SU(2) \to SO(3),$$
$$\pi : \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & \sin s & \cos s \end{pmatrix},$$

allora è chiaro che questo è un omomorfismo di due sottogruppi 1-parametrici e che due elementi t e $t+2\pi$ di $SU(2)$ hanno lo stesso immagine in $SO(3)$. Poi, $t+4\pi n$ per ogni n intero è lo stesso punto di $SU(2)$. Quindi, $\exp(t\tau_1)$ è un rivestimento doppio di $\exp(sT_1)$. Generalizzando per il gruppo intero, possiamo dire che la mappa

$$\exp(t_1\tau_1 + t_2\tau_2 + t_3\tau_3) \to \exp(t_1T_1 + t_2T_2 + t_3T_3)$$

è un rivestimento doppio di $SO(3)$ da $SU(2)$. Sapendo che $SU(2)$ ha la topologia globale della sfera S^3, possiamo scoprire la topologia di $SO(3)$. Il sottogruppo 1-parametrico $\exp(t\tau_1)$ di $SU(2)$ comincia all'elemento neutro e con $t=0$ e ritorna a questo elemento con $t=4\pi$. Questo è un grande cerchio intorno S^3. I punti t e $t+2\pi$ sono diametralmente opposti l'uno all'altro. Per farli diventare lo stesso punto di $SO(3)$ possiamo identificare $SO(3)$ come la semisfera superiore di S^3 con i punti sugli estremi opposti di un diametro equatoriale identificate. Questa varietà non è semplicemente connessa, perché una curva, che connette due punti antipodali identificati non può essere deformata in un punto.

4.4 Vettori di Killing

Definizione 4.15.

Un campo tensoriale T si chiama invariante rispetto all'azione di un campo vettoriale V se

$$L_V T = 0.$$

Teorema 4.5.

Sia $F = \{T_1, T_2, \ldots\}$ un insieme di campi tensoriali. Allora l'insieme di tutti i campi vettoriali rispetto ai quali tutti i campi nell'insieme F sono invarianti formano un'algebra di Lie.

Dimostrazione

Se un campo tensoriale T è invariante rispetto ai campi vettoriali X e Y, esso è anche invariante rispetto ad una loro combinazione lineare

$$L_{aX+bY}T = aL_XT + bL_YT = 0,$$

laddove a e b sono dei numeri reali.

Inoltre, il campo tensoriale è invariante rispetto alla parentesi di Lie di questi campi visto che

$$L_{[X,Y]}T = [L_X, L_Y]T = L_XL_YT - L_YL_XT = 0.$$

Definizione 4.16.

Un campo vettoriale di Killing X è un campo che soddisfa l'equazione

$$L_Xg = 0, \tag{38}$$

laddove g è un tensore metrico sulla varietà M. In una base di coordinate $\{x^i\}$ questa equazione può essere riscritta come

$$g_{ij,k}X^k + g_{ik}X^k_{,j} + g_{kj}X^k_{,i} = 0.$$

I campi vettoriali di Killing costituiscono un'algebra di Lie. Il corrispondente gruppo di Lie si chiama gruppo di isometrie della varietà M.

4.5 Simmetria sferica

Definizione 4.17.

Una varietà M, laddove è definito un tensore metrico g, è sfericamente simmetrica se la sua algebra di Lie di campi vettoriali di Killing contiene una sottoalgebra di Lie, che è l'algebra di Lie del gruppo $SO(3)$.

Consideriamo una spazio di Hilbert di funzioni definite sulla sfera S^2. L'azione del gruppo $SO(3)$ sulla sfera S^2 induce trasformazioni di questi funzioni che costituiscono una rappresentazione infinitodimensionale del gruppo $SO(3)$. Si può costruire le rappresentazioni irreducibili finito-dimensionali in $L^2(S^2)$. Queste rappresentazioni usano le funzioni sferiche $Y_{lm}(\theta, \phi)$, dove il numero orbitale quantistico $l, (l = 0, 1, 2, \ldots)$ caratterizza una rappresentazione e il numero quantistico magnetico $m, (m = -l, -(l-1, \ldots, l)$ caratterizza gli elementi di base di questa rappresentazione. La rappresentazione con $l = 1$ è la più piccola rappresentazione fedele del gruppo $SO(3)$; essa si chiama la rappresentazione fondamentale.

Ovviamente, ogni rappresentazione del gruppo $SO(3)$ definisce anche una rappresentazione del gruppo $SU(2)$. Tuttavia, il gruppo $SU(2)$ ha altre rappresentazioni, che non sono rappresentazioni del gruppo $SO(3)$. La rappresentazione fondamentale di $SU(2)$ è una rappresentazione in due dimensioni complesse. Si chiama rappresentazione spin-1/2. Se prendiamo un vettore dello spazio $\mathbb{C}^2$ che si chiama spinore e facciamo la trasformazione corrispondente al parametro $t = 2\pi$, siamo all'elemento $-e$ in $SU(2)$. Quindi, lo spinore cambia il segno quando viene rotato per 2π.

È molto interessante che questa corrispondenza tra le rappresentazioni non è semplicemente un gioco matematico. La funzione d'onda di una particella elementare con lo spin uguale a $\frac{1}{2}$, appartiene ad uno spazio vettoriale di $SU(2)$ con l non intero. Quindi, cominciamo con l'algebra di Lie della simmetria sferica, troviamo il gruppo $SU(2)$, che ha la topologia che è la più semplice possibile, e vediamo che questo gruppo è più fondamentale del gruppo $SO(3)$, perché nella Natura esistono particelle che appartengono alle rappresentazioni di $SU(2)$ e non a quelle di $SO(3)$.

5 Forme differenziali

5.1 Volume, area e forme differenziali

Consideriamo la nozione di volume in due dimensioni, dove esso si chiama area. Ogni coppia di vettori (infinitesimali) in uno spazio euclideo definisce un'area (infinitesimale): l'area del parallelogramma costruito su questi vettori. La stessa area può essere definita su diverse coppie di vettori, che possono avere le lunghezze e gli angoli tra loro diversi. La nozione dell'area è, quindi, meno ristrettiva rispetto alla nozione di una metrica: la metrica euclidea definisce le lunghezze di vettori e l'angolo incluso, mentre l'area dà solo un numero, associato ai due vettori. Naturalmente, se una metrica esiste, essa univocamente definisce l'area. Tuttavia, è possibile definire un'area per una varietà bidimensionale (o un volume per una varietà arbitraria) senza aver bisogno di una metrica.

È ovvio che l'area deve essere lineare rispetto ai due vettori. Quindi, l'area è un tensore di tipo (0,2). Inoltre, se due vettori V e W sono paralleli, l'area sparisce. Quindi, il tensore $B(V,W)$ ha la proprietà $B(V,V) = 0$.

Teorema 5.1.

Se un tensore B di tipo (0,2) ha la proprietà $B(V,V) = 0$ per ogni V, allora questo tensore è antisimmetrico $B(V,W) = -B(W,V)$.

Dimostrazione

$$\begin{aligned} &0 = B(V+W, V+W) = B(V,V) + B(V,W) + B(W,V) + B(W,W) \\ &= B(V,W) + B(W,V). \\ &B(V,W) = -B(W,V). \end{aligned}$$

Consideriamo un parallelogramma, i cui vettori hanno le componenti V^x, V^y, W^x, W^y nella base cartesiana. Allora l'area

$$A = \det \begin{pmatrix} V^x & V^y \\ W^x & W^y \end{pmatrix}.$$

Ovviamente il determinante è antisimemtrico rispetto allo scambio tra V e W. Di solito, sotto il volume (l'area) si intende il valore assoluto di questo determinante, ma tenere in considerazione il segno è anche utile.

5.2 Le operazioni con le forme differenziali

La definizione del prodotto esterno per le forme differenziali può essere data nel seguente modo. Se $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ sono due 1-forme, allora

$$\tilde{p} \wedge \tilde{q} \equiv \tilde{p} \otimes \tilde{q} - \tilde{q} \otimes \tilde{p}.$$

Ovviamente $\tilde{p} \wedge \tilde{q}$ è una due-forma:

$$\tilde{p} \wedge \tilde{q}(V, W) = \tilde{p}(V) \otimes \tilde{q}(W) - \tilde{q}(V) \otimes \tilde{p}(W) = -\tilde{p} \wedge \tilde{q}(W, V).$$

Inoltre $\tilde{p} \wedge \tilde{p}(V, W) = 0$ per ogni coppia V, W.

La regola per prodotti esterni si estende naturalmente a tre-forme:

$$\begin{aligned}&\tilde{p} \wedge (\tilde{q} \wedge \tilde{r}) = (\tilde{p} \wedge \tilde{q}) \wedge \tilde{r} = \tilde{p} \wedge \tilde{q} \wedge \tilde{r} \\ &\equiv \tilde{p} \otimes \tilde{q} \otimes \tilde{r} + \tilde{q} \otimes \tilde{r} \otimes \tilde{p} + \tilde{r} \otimes \tilde{p} \otimes \tilde{q} - \tilde{r} \otimes \tilde{p} \otimes \tilde{q} - \tilde{p} \otimes \tilde{r} \otimes \tilde{q} - \tilde{q} \otimes \tilde{p} \otimes \tilde{r}.\end{aligned}$$

Analogamente, si può estendere questa formula al caso di p 1-forme, dove $p \leq n$.

Generalmente, per p-forma $\tilde{\beta}$:

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{p!} \beta_{i_1 \cdots i_p} \tilde{\omega}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}^{i_p},$$

dove

$$\beta_{i_1 \cdots i_p} = \tilde{\beta}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}).$$

5.2.1 Prodotto interno

Torniamo ora alla nozione del prodotto interno di una forma differenziale per un vettore,

$$i_\xi \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\xi, \ldots),$$

$$[\tilde{\alpha}(\xi)]_{j \cdots k} = \alpha_{ij \cdots k} \xi^i,$$

che è una $(p-1)$-forma ottenuta mediante la contrazione di una p-forma $\tilde{\alpha}$ con un vettore ξ.

Consideriamo $\tilde{\alpha} = \tilde{p} \wedge \tilde{q}$, laddove $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ sono 1-forme. Allora

$$(\tilde{p} \wedge \tilde{q})(\xi) = (\tilde{p} \otimes \tilde{q} - \tilde{q} \otimes \tilde{p})(\xi) = \tilde{p}(\xi)\tilde{q} - \tilde{q}(\xi)\tilde{p}.$$

Analogamente, per un prodotto di p 1-forme troviamo

$$(\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}^k)(\xi) = \xi^i \tilde{\omega}^j \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}^k$$
$$-\xi^j \tilde{\omega}^i \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}^k + \cdots \pm \xi^k \tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \cdots$$
$$= p\xi^{[i} \tilde{\omega}^j \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}^{k]}.$$

Da qui segue che

$$\tilde{\alpha}(\xi) = \frac{1}{(p-1)!} \xi^i \alpha_{ij\cdots k} \tilde{\omega}^j \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}^k.$$

5.3 Chiralità e orientabilità

Una varietà n-dimensionale ha uno spazio unidimensionale di n-forme in ogni punto. Consideriamo un campo di n-forme $\tilde{\omega}$ e una base di vettori nel punto P. Il numero $\tilde{\omega}(e_1, \ldots, e_n)$ è diverso da zero se e solo se $\tilde{\omega}$ è diverso da zero nel punto P. Quindi, $\tilde{\omega}$ divide tutte le basi di vettori nel punto P in due classi, quelli per cui il numero $\tilde{\omega}(e_1, \ldots, e_n)$ è positivo e quelli per cui esso è negativo. Queste classi si chiamano aventi chiralità sinistra e chiralità destra. Una varietà si chiama orientabile se è possibile definire la chiralità coerentemente sulla varietà intera. Questo significa che è possibile introdurre una base di campi vettoriali continue tale che la chiralità è la stessa dappertutto. Uno spazio euclideo è orientabile e una striscia di Möbius non lo è.

5.4 Volume ed integrazione sulle varietà orientabili

In una varietà n-dimensionale, un insieme di n vettori linearmente indipendenti definisce una regione con un volume diverso da zero. Il volume è un valore di una n-forma, che possiamo scegliere liberamente. Supponiamo che $\tilde{\omega}$ sia una n-forma su un insieme aperto U di una varietà M, dove sono definite coordinate $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Allora esiste una funzione $f(x^1, \ldots, x^n)$ tale che

$$\tilde{\omega} = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Per integrare su U, dividiamolo in regioni piccole (cellule), definite da n-tuple di vettori $\left\{\Delta x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \Delta x^n \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$. L'integrale della funzione f su una cellula è uguale approssimativamente al valore di f, moltiplicato per il prodotto

$$\Delta x^1 \cdots \Delta x^n = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \left(\Delta x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \Delta x^n \frac{\partial}{\partial x^n}\right).$$

Allora, abbiamo

$$\int_{\text{cellula}} f(x^1, \ldots, x^n) d^n x \approx \tilde{\omega}(\text{cellula}).$$

Sommando tutte le contribuzioni da varie cellule e prendendo il limite, quando le loro misure tendono allo zero, otteniamo

$$\int \tilde{\omega} \equiv \int f(x^1, \ldots, x^n) d^n x.$$

5.5 N-vettori

Definizione 5.1.

Un tensore completamente antisimmetrico di tipo $\begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}$ si chiama <u>N-vettore</u>.

Ci sono 4 spazi vettoriali che hanno la stessa dimensionalità: p-forme, $(n-p)$-forme, p-vettori, $(n-p)$-vettori. La loro dimensionalità è uguale a $C_p^n = C_{n-p}^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Quando un tensore metrico è definito, si può mettere in corrispondenza $\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ tensori. Indipendentemente, n-forma $\tilde{\omega}$ di volume stabilisce una mappa tra p-forme e $(n-p)$-vettori.

Definizione 5.2.

Avendo un q-vettore T con le componenti $T^{i \cdots k} = T^{[i \cdots k]}$, definiamo $(n-q)$-forma $\tilde{A}$ come

$$A_{j \cdots l} = \frac{1}{q!} \omega_{i \cdots k j \cdots l} T^{i \cdots k}.$$

Simbolicamente, possiamo scrivere

$$\tilde{A} = \tilde{\omega}(T)$$

o

$$\tilde{A} =^* T.$$

Diciamo che $\tilde{A}$ è duale di T rispetto a $\tilde{\omega}$.

La mappa tra T e ${}^*T$ è invertibile. Definiamo N-vettore $\omega^{i\cdots k}$ tramite l'equazione

$$\omega^{i\cdots k}\omega_{i\cdots k} = n!.$$

If fattore $n!$ garantisce la normalizzazione

$$\omega^{12\cdots n} = \frac{1}{\omega_{12\cdots n}}.$$

Definizione 5.3.

Diremo che S è un duale di $\tilde{B}$ rispetto a $\tilde{\omega}$, se B è p-forma e

$$S^{i\cdots k} = \frac{1}{p!}\omega^{l\cdots mi\cdots k}B_{l\cdots m}.$$

Per illustrare la proprietà inversa di queste relazioni duali, consideriamo, per cominciare, funzioni scalari. La funzione f, vista come uno 0-vettore, ha la n-forma duale $f\tilde{\omega}$. Questa n-forma ha lo 0-vettore duale

$${}^*(f\tilde{\omega}) = \frac{1}{n!}\omega^{l\cdots m}(f\omega_{l\cdots m}) = f.$$

Quindi, abbiamo dimostrato che

$${}^{**}f = f.$$

Ora troviamo la relazione generale di questo tipo. Cominciamo con una p-forma $\tilde{B}$ e definiamo il $(n-p)$-vettore duale S. Poi, prendiamo il duale di S:

$$\begin{aligned}
({}^*S)_{j\cdots l} &= \frac{1}{(n-p)!}\omega_{i\cdots kj\cdots l}S^{i\cdots k} \\
&= \frac{1}{p!(n-p)!}\omega_{i\cdots kj\cdots l}\omega^{r\cdots si\cdots k}B_{r\cdots s} \\
&= \frac{(-1)^{p(n-p)}}{p!(n-p)!}\omega_{i\cdots kj\cdots l}\omega^{i\cdots kr\cdots s}B_{r\cdots s}.
\end{aligned}$$

Per ottenere l'ultima riga è necessario trascinare ognuno di $(n-p)$ apici $i\cdots k$ attraverso tutti i p apici $r\cdots s$. Questa operazione dà $(n-p)$ fattori di $(-1)^p$. Ora, fissiamo i pedici $j\cdots l$, come, per esempio $(1\cdots p)$. Allora, nella somma (per $r\cdots s$ fissi), gli indici $i\cdots k$ devono essere scelti dall'insieme

$(p+1,\ldots,n)$. Ci saranno $(n-p)!$ termini diversi da zero in questa somma, uguali tra loro. Dunque, abbiamo

$$\omega_{i\cdots k1\cdots p}\omega^{i\cdots kr\cdots s} = (n-p)!\omega_{p+1\cdots n1\cdots p}\omega^{p+1\cdots nr\cdots s}.$$

Se l'insieme $(r\cdots s)$ non è una permutazione di $(1\cdots p)$ anche questa espressione è zero. Nella somma su $(r\cdots s)$,

$$\omega^{p+1\cdots nr\cdots s}B_{r\cdots s},$$

ci saranno $p!$ termini diversi da zero e uguali tra di loro.

Quindi,

$$\omega^{p+1\cdots nr\cdots s}B_{r\cdots s} = p!\omega^{p+1\cdots n1\cdots p}B_{1\cdots p}.$$

Combinando questi risultati, otteniamo

$$({}^*S)_{1\cdots p} = (-1)^{p(n-p)}\omega_{p+1\cdots n1\cdots p}\omega^{p+1\cdots n1\cdots p}B_{1\cdots p}.$$

Sapendo che

$$\omega_{p+1\cdots n1\cdots p}\omega^{p+1\cdots n1\cdots p} = 1,$$

avremo

$$({}^*S)_{1\cdots p} = (-1)^{p(n-p)}B_{1\cdots p}$$

o

$${}^{**}\tilde{B} = (-1)^{p(n-p)}\tilde{B}.$$

Analogamente, partendo da un q-vettore T, otteniamo

$${}^{**}T = (-1)^{q(n-q)}T.$$

Notiamo, che quando n è dispari, $(-1)^{p(n-p)} = +1$ sempre.

Definizione 5.4.

Introduciamo i simboli di Levi-Civita completamente antisimmetrici:

$$\varepsilon_{ij\cdots k} = \varepsilon^{ij\cdots k} \equiv \begin{cases} +1 & \text{permutazione pari} \\ -1 & \text{permutazione dispari} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{39}$$

Consideriamo una n-forma $\tilde{\omega}$ con le componenti in una certa base di coordinate

$$\omega_{ij\cdots k} = w\varepsilon_{ij\cdots k}.$$

La funzione w si chiama densità scalare. Questa funzione non è un vero scalare, perché essa dipende dalle coordinate. Quando facciamo un cambio di coordinate $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$, allora le componenti di $\tilde{\omega}$ sono moltiplicate per la Jacobiana J della trasformazione, mentre $\varepsilon_{ij\cdots k}$ sono costanti secondo la loro definizione (39). Quindi,

$$w' = Jw.$$

Questa è la legge di trasformazione per una densità scalare di peso 1. Si può generalizzare questa regola per i tensori.

Generalmente si dice, che una densità tensoriale ha un peso n, se la trasformazione di coordinate implica la moltiplicazione di questo oggetto per la n-esima potenza della Jacobiana della trasformazione.

5.6 Metrica e volume

Supponiamo che la varietà M sia fornita di un tensore metrico g_{ik}. Scegliamo una base ortonormale di 1-forme $\tilde{\omega}^i$. Definiamo ora una n-forma di volume preferita

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}^n.$$

Dimostriamo, che per un sistema di coordinate locale $\{x^{i'}\}$,

$$\tilde{\omega} = |g|^{1/2} dx^{1'} \wedge \cdots \wedge dx^{n'}, \tag{40}$$

dove g è il determinante della metrica $g_{i'j'}$.

Supponiamo che la matrice $\Lambda^i_{j'}$ trasformi la base di 1-forme $\tilde{\omega}^i = \Lambda^i_{j'} dx^{j'}$. Allora

$$\tilde{\omega} = \Lambda^1_{j'} \cdots \Lambda^n_{k'} dx^{j'} \wedge \cdots \wedge dx^{k'} = \Lambda^1_{j'} \cdots \Lambda^n_{k'} \varepsilon^{j' \cdots k'} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \det(\Lambda) dx^{j1} \wedge \cdots \wedge dx^{kn}.$$

Tuttavia, le componenti della metrica trasformano come

$$g_{i'j'} = \Lambda^k_{i'} \Lambda^l_{j'} g_{kl},$$

e, quindi,

$$\det(g_{i'j'}) = [\det(\Lambda)]^2 \det(g_{ij}).$$

Poiché la base originale era ortonormale, $\det(g_{ij}) = \pm 1$. Quindi,

$$\det(\Lambda) = |\det(g_{i'j'})|^{1/2},$$

dimostrando il risultato (40).

5.7 Esempi di derivate esterne nello spazio di tre dimensioni

Consideriamo nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ un vettore

$$A = A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + A^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

La sua 1-forma associata è

$$\tilde{A} = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3,$$

dove $A^i = A_i$. La derivata esterna di questa 1-forma è

$$d\tilde{A} = A_{1,i} dx^i \wedge dx^1 + A_{2,i} dx^i \wedge dx^2 + A_{3,i} dx^i \wedge dx^3.$$

Poi,

$$\begin{aligned}
& d\tilde{A} = (A_{1,2} - A_{2,1}) dx^2 \wedge dx^1 + (A_{2,3} - A_{3,2}) dx^3 \wedge dx^2 \\
& +(A_{3,1} - A_{1,3}) dx^1 \wedge dx^3.
\end{aligned}$$

Si vede, che il rotore del vettore A è contenuto in questa espressione. Per farlo più chiaro, prendiamo il vettore duale alla 2-forma, scritta prima:

$$\begin{aligned}
& {}^*d\tilde{A} = (A_{1,2} - A_{2,1})^*(dx^2 \wedge dx^1) + (A_{2,3} - A_{3,2})^*(dx^3 \wedge dx^2) \\
& +(A_{3,1} - A_{1,3})^*(dx^1 \wedge dx^3) \\
& = (A_{1,2} - A_{2,1})\varepsilon^{213} \frac{\partial}{\partial x^3} + (A_{2,3} - A_{3,2})\varepsilon^{321} \frac{\partial}{\partial x^1} \\
& +(A_{3,1} - A_{1,3})\varepsilon^{132} \frac{\partial}{\partial x^2} \\
& = (A_{2,1} - A_{1,2}) \frac{\partial}{\partial x^3} + (A_{3,2} - A_{2,3}) \frac{\partial}{\partial x^1} \\
& +(A_{3,2} - A_{2,3}) \frac{\partial}{\partial x^1}.
\end{aligned}$$

Possiamo scrivere

$$\mathrm{rot} A = \nabla \times A =^* d\tilde{A},$$

laddove il prodotto vettoriale nello spazio tridimensionale è definito come al solito:

$$(A \times B)^i = \varepsilon^{ijk} A^j B^k.$$

Notiamo, che ben nota affermazione che il rotore del gradiente di una funzione scalare è uguale a zero, segue dal fatto che il quadrato della derivata esterna di una funzione scalare è uguale a zero.

Definiamo anche la divergenza di un vettore. La 2-forma duale ad un vettore A è

$$^*A = A^1(dx^2 \wedge dx^3) + A^2(dx^3 \wedge dx^1) + A^3(dx^1 \wedge dx^2).$$

Allora, la derivata esterna sarà

$$\begin{aligned} &d(^*A) = A^1_{,j}dx^j \wedge dx^2 \wedge dx^3 + A^2_{,j}dx^j \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\ &+A^3_{,j}dx^j \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= A^i_{,i}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

La divergenza di un vettore viene data dal duale di questa 3-forma:

$$\mathrm{div}A = \nabla \cdot A =^* d(*A) = A^i_{,i}.$$

Notiamo, che se A è il rotore di un altro vettore B:

$$A =^* d\tilde{B},$$

allora,

$$\mathrm{div}A =^* d(**d\tilde{B}) =^* d^2\tilde{B} = 0$$

e così arriviamo alla dimostrazione del fatto che la divergenza del rotore è uguale a zero.

5.8 Forme esatte e chiuse

Definizione 5.5.

Una forma $\tilde{\alpha}$ si chiama esatta se $\tilde{\alpha} = d\tilde{\beta}$.

Definizione 5.6.

Una forma $\tilde{\alpha}$ si chiama chiusa se $d\tilde{\alpha} = 0$.

Tutte le forme esatte sono chiuse.

Domanda

Una forma differenziale chiusa è anche esatta sempre ?

Teorema 5.2. (Lemma di Poincaré)

Se $\tilde{\alpha}$ è una p-forma chiusa definita dappertutto in una regione U della varietà M e U abbia una 1-1 mappa differenziabile su una palla aperta di raggio unitario in $\mathbb{R}^n$, allora esiste una $(p-1)$-forma $\tilde{\beta}$ tale che $\tilde{\alpha} = d\tilde{\beta}$.

Dimostrazione

Definiamo la $(p-1)$-forma $\tilde{\beta}$ come

$$\tilde{\beta} = \int_0^1 dt t^{p-1} i_X \tilde{\alpha}(tx_1, \dots, tx_n),$$

dove il campo vettoriale X è definito come

$$X = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Calcoliamo la derivata esterna $d\tilde{\beta}$:

$$d\tilde{\beta} = \int_0^1 dt t^{p-1} d i_X \tilde{\alpha}(tx_1, \dots, tx_n) = \int_0^1 dt t^{p-1} L_X \tilde{\alpha}(tx_1, \dots, tx_n),$$

dove abbiamo usato l'equazione

$$L_X = d i_X + i_X d$$

ed il fatto che la forma $\tilde{\alpha}$ è chiusa, cioé $d\tilde{\alpha} = 0$. Poi,

$$L_X \tilde{\alpha}(Y_1, \dots, Y_p) = X(\tilde{\alpha}(tx_1, \dots, tx_n)(Y_1, \dots, Y_p))$$
$$- \sum_{k=1}^{p} \tilde{\alpha}(tx_1, \dots, tx_n)(Y_1, \dots, [X, Y_k], \dots, Y_p).$$

Notiamo che per qualsiasi funzione $f(tx_1, \dots, tx_n)$ vale l'uguaglianza

$$X f(tx_1, \dots, tx_n) = t \frac{\partial}{\partial t} f(tx_1, \dots, tx_n). \tag{41}$$

Scegliamo come i campi vettoriali Y_k campi vettoriali della base olonoma

$$Y_k = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}.$$

In questo caso

$$[X, Y_k] = -Y_k. \tag{42}$$

Usando le uguaglianze (41) e (42), otteniamo

$$(L_X\tilde{\alpha})_{i_1\ldots i_p} = t\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\alpha}_{i_1\ldots i_p} + p\tilde{\alpha}_{i_1\ldots i_p}.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} d\tilde{\beta} &= \int_0^1 dt\left(t^p\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\alpha}(tx_1,\ldots,tx_n) + pt^{p-1}\tilde{\alpha}(tx_1,\ldots,tx_n)\right) \\ &= \int_0^1 dt\frac{\partial}{\partial t}(t^p\tilde{\alpha}(tx_1,\ldots,tx_n)) = \tilde{\alpha}(x_1,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

Esempio 5.1.

Consideriamo un anello sul piano $\mathbb{R}^2$ che esclude l'origine delle coordinate. La 1-forma

$$\tilde{\alpha} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

è chiusa. Si può notare che

$$\tilde{\alpha} = d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$$

o

$$\tilde{\alpha} = d\theta,$$

dove $\theta = \arctan\frac{y}{x}$ è un angolo nelle coordinate polari. Tuttavia, θ non è definita in modo univoco in tutto l'anello. Quindi, la rappresentazione $\tilde{\alpha} = d\theta$ è valida localmente, ma non globalmente.

5.9 Teorema di Stokes

Consideriamo l'integrale di una n-forma $\tilde{\omega}$ su una regione U di una varietà n-dimensionale M. Supponiamo che U abbia un bordo liscio orientabile

∂U. Sia ξ un campo vettoriale su M. Consideriamo un cambiamento della regione di integrazione , generato da un trasporto di Lie della regione U. Il cambiamento dell'integrale è

$$\int_{U(\varepsilon)} \tilde{\omega} - \int_{U(0)} \tilde{\omega} = \int_{\delta U(\varepsilon)} \tilde{\omega},$$

dove ε è un parametro del trasporto di Lie. Sia V un rappezzo di ∂U coperto dalle coordinate $\{x^2, \ldots, x^n\}$. Facendo un trasporto di Lie lungo ξ, costruiamo le coordinate $\{x^1 = \varepsilon, x^2, \ldots, x^n\}$ per un intorno in M di ogni rappezzo V, laddove ξ non è tangente a ∂U. Questo definisce un sistema di coordinate per la regione $\delta V(\varepsilon)$ tra $\partial U(0)$ e $\partial U(\varepsilon)$ sopra $V(0)$. Allora

$$\tilde{\omega} = f(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Poi

$$\begin{aligned} \int_{\delta V(\varepsilon)} \tilde{\omega} &= \int_{V(0)} \left[\int_0^\varepsilon f dx^1 \right] dx^2 \cdots dx^n \\ &= \varepsilon \int_{V(0)} f(0, x^2, \ldots, x^n) dx^2 \cdots dx^n + o(\varepsilon) \\ &= \varepsilon \int_V \tilde{\omega}(\xi)|_{\partial U} + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{U(\varepsilon)} \tilde{\omega} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{U(\varepsilon)} \tilde{\omega} - \int_{U(0)} \tilde{\omega} \right] = \int_{\partial U} \tilde{\omega}(\xi)|_{\partial U}. \tag{43}$$

Dall'altro lato

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{U(\varepsilon)} \tilde{\omega} = \int_{U(0)} L_\xi \tilde{\omega}. \tag{44}$$

Per una n-forma $\tilde{\omega}$,

$$L_\xi \tilde{\omega} = d[\tilde{\omega}(\xi)],$$

quindi

$$\int_U L_\xi \tilde{\omega} = \int_U d[\tilde{\omega}(\xi)]. \tag{45}$$

Combinando le formule (43) and (45), otteniamo

$$\int_U d[\tilde{\omega}(\xi)] = \int_{\partial U} \tilde{\omega}(\xi)|_{\partial U}. \tag{46}$$

Questa espressione ci dà il teorema della divergenza.

Poiché $\tilde{\omega}$ e ξ sono arbitrari, $\tilde{\omega}(\xi)$ è una $(n-1)$-forma arbitraria. Quindi, possiamo riscrivere l'equazione (46) come il teorema di Stokes per una $(n-1)$-forma $\tilde{\alpha}$ arbitraria

$$\int_U d\tilde{\alpha} = \int_{\partial U} \tilde{\alpha}. \tag{47}$$

Nel caso di due dimensioni, $\tilde{\alpha}$ è una 1-forma, $\tilde{\alpha} = \alpha_i dx^i$,

$$d\tilde{\alpha} = (\alpha_{i,j} - \alpha_{j,i}) dx^j \otimes dx^i.$$

Quindi, otteniamo

$$\int_U (\alpha_{1,2} - \alpha_{2,1}) dx^1 dx^2 = \oint_{\partial U} \alpha_i \frac{dx^i}{d\lambda} d\lambda = \oint_{\partial U} \alpha_i dx^i,$$

dove $\frac{d}{d\lambda}$ - un vettore tangente alla curva ∂U.

Il teorema di Stokes include anche il teorema di Gauss del calcolo vettoriale. Torniamo alla formula (46) e consideriamo le coordinate tali che $\tilde{\omega} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ in una certa regione W di M. Allora, la sua contrazione con ξ è

$$\tilde{\omega}(\xi) = \xi^1 dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n - \xi^2 dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \pm \cdots$$

e

$$\begin{aligned} &d[\tilde{\omega}(\xi)] = \xi^1_{,1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n + \xi^2_{,2} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \pm \cdots \\ &= \xi^i_{,i} \tilde{\omega}. \end{aligned}$$

Sfruttando un'analogia con la geometria euclidea, introduciamo $\tilde{\omega}$-divergenza di un campo vettoriale ξ:

$$\mathrm{div}_\omega(\xi) = d[\tilde{\omega}(\xi)].$$

Se in W usiamo coordinate tali che ∂U è una superficie con x^1 costante, allora la restrizione di $\tilde{\omega}(\xi)$ su ∂U è

$$\tilde{\omega}(\xi)|_{\partial U} = \xi^1 dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = dx^1(\xi) dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Più generalmente, se $\tilde{n}$ è una 1-forma normale a ∂U (cioè $\tilde{n}(\eta) = 0$ per ogni vettore tangente a ∂U), e se $\tilde{\alpha}$ è qualsiasi $(n-1)$-forma tale che

$$\tilde{\omega} = \tilde{n} \wedge \tilde{\alpha},$$

allora otteniamo

$$\tilde{\omega}(\xi)|_{\partial U} = \tilde{n}(\xi)\tilde{\alpha}|_{\partial U}.$$

Quindi,

$$\int_U \mathrm{div}_\omega(\xi) = \int_{\partial U} \tilde{n}(\xi)\tilde{\alpha}\Big|_{\partial U}.$$

Se il sistema di coordinate copre tutto U, allora

$$\int_U \xi^i_{,i} d^n x = \oint_{\partial U} \xi^i n_i d^{n-1}x,$$

che è il teorema di Gauss in $\mathbb{R}^n$.

5.10 Coomologie di de Rham

Sia $Z^p(M)$ l'insieme di tutte le p-forme chiuse su M e sia $B^p(M)$ l'insieme di tutte le p-forme esatte su M. Gli entrambi insiemi sono spazi vettoriali reali. Infatti, $B^p(M)$ è uno sottospazio di $Z^p(M)$. Due forme chiuse $\tilde{\alpha}_1$ e $\tilde{\alpha}_2$ si chiamano equivalenti se la loro differenza è un elemento di $B^p(M)$:

$$\tilde{\alpha}_1 \approx \tilde{\alpha}_2 \Leftrightarrow \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2 = d\tilde{\beta}.$$

L'insieme di tutte le classi di equivalenza si chiama p-esimo spazio vettoriale di coomologie di de Rham di $M, H^p(M)$.

Possiamo ora riscrivere il risultato del lemma di Poincaré come l'affermazione che per ogni palla aperta o per ogni regione U diffeomorfa a tale palla, $H^p(U) = 0$ per $p \geq 1$, poiché tutte le p-forme chiuse sono equivalenti tra di loro e, quindi, sono equivalenti alla p-forma zero. È possibile calcolare $H^0(M)$ per ogni varietà connessa M. Una 0-forma è una funzione, quindi, $Z^0(M)$ è lo spazio di funzioni f tali che $df = 0$, cioè costanti. Questo è $\mathbb{R}^1$. Inoltre, poiché non esistono (-1)-forme, lo spazio $B^0(M)$ ha dimensionalità uguale a zero. La relazione di equivalenza è una uguaglianza algebrica: le costanti f e g sono equivalenti ($f \approx g$ se e solo se loro sono uguali ($f = g$). Quindi, $H^0(M) = Z^0(M) = \mathbb{R}^1$. Se M non è una varietà connessa, la funzione di $Z^0(M)$ può avere diversi valori su diverse componenti di M. Allora $H^0(M) = Z^0(M) = \mathbb{R}^m$, laddove m è il numero delle componenti di M. Si può dimostrare che

$$H^n(S^n) = \mathbb{R}^1,$$
$$H^p(S^n) = 0,\ 0 < p < n,$$
$$H^0(S^n) = \mathbb{R}^1.$$

La dimensionalità di $H^p(M)$ si chiama p-esimo numero di Betti su M. La definizione di $H^p(M)$ è basata sulla struttura differenziale della varietà, ma il teorema di de Rham mostra che i gruppi di coomologie dipendono solo dalla struttura topologica di M.

5.11 Derivata di Lie, prodotto interno e la derivata esterna – ancora una volta

Concludendo questo capitolo, scriviamo l'elenco delle formule che rappresentano le proprietà delle derivate di Lie, dei prodotti interni e delle derivate esterne che agiscono nell'algebra esterna di forme differenziali:

$$\begin{aligned} &L_X L_Y - L_Y L_X = L_{[X,Y]}, \\ &L_X i_Y - i_Y L_X = i_{[X,Y]}, \\ &L_x d - dL_X = 0, \\ &i_X i_Y + i_Y i_X = 0, \\ &i_X d + di_X = L_X, \\ &d^2 = 0. \end{aligned} \tag{48}$$

6 Connessione affine e geometria Riemanniana

Definizione 6.1.

Connessione affine è una regola che introduce una nozione di trasporto parallelo su una varietà.

Supponiamo di avere su una varietà una curva G ed una connessione. Il vettore tangente alla curva è U. Possiamo dire che un campo vettoriale è stato trasportato parallelamente lungo la curva G, se viene soddisfatta la relazione:

$$\nabla_U V = 0.$$

In questo caso si dice che V è trasportato parallelamente lungo G. ∇_U è la derivata covariante lungo U.

Sia W un campo vettoriale. Introduciamo un nuovo campo vettoriale W^* che viene trasportato parallelamente e che coincide con il campo $W_{\lambda_0+\varepsilon}$ nel punto che è parameterizzato come $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$:

$$\begin{aligned} &W^*_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda_0) = W(\lambda_0 + \varepsilon), \\ &\nabla_U W^* = 0. \end{aligned}$$

Il vettore $W^*_{\lambda_0+\varepsilon}$ è il vettore $W_{\lambda_0+\varepsilon}$ trasportato parallelamente indietro al punto λ_0. Quindi, la derivata covariante di un campo vettoriale può essere definita così:

$$(\nabla_U W)_{\lambda_0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{W^*_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda_0) - W(\lambda_0)}{\varepsilon}. \tag{49}$$

La procedura della definizione della derivata covariante assomiglia a quella usata per definire la derivata di Lie, tuttavia è importante capire che c'è la differenza essenziale tra queste due procedure. Mentre la definizione della derivata di Lie e il trasporto indietro indotto da un campo vettoriale richiede la conoscenza di tutta la congruenza delle curve, cioè i campi U e W devono essere definite in tutto un intorno della curva G, il trasporto parallelo richiede solo la conoscenza della curva G, dei campi vettoriali U e W sulla curva e della connessione affine sulla curva.

È chiaro dall'equazione (49) che ∇_U è un operatore differenziale:

$$\begin{aligned} \nabla_U(fW) &= f\nabla_U W + W\nabla_U f \\ &= f\nabla_U W + W\frac{df}{d\lambda}, \end{aligned} \tag{50}$$

dove l'ultimo passaggio è un'estensione ovvia per gli scalari. La derivata covariante può essere estesa anche per i tensori mediante la regola di Leibniz:

$$\nabla_U(A\otimes B) = (\nabla_U A)\otimes B + A\otimes(\nabla_U B), \tag{51}$$

$$\nabla_U\langle\tilde{\omega}, A\rangle = \langle\nabla_U\tilde{\omega}, A\rangle + \langle\tilde{\omega}, \nabla_U A\rangle. \tag{52}$$

Le equazioni (50)–(52) garantiscono la compatibilità della connessione con la struttura differenziale.

Supponiamo di aver cambiato il parametro lungo la nostra curva G da λ a μ. Allora il nuovo campo vettoriale tangente sarà gU, dove $g = d\lambda/d\mu$. Dall'equazione (49) è chiaro che anche la derivata covariante dovrebbe essere moltiplicata per g, visto che ε sarà sostituita da $\delta\mu = \varepsilon d\mu/d\lambda$ mentre $W^*_{\mu_0+\delta\mu}(\mu_0)$ coincide con $W^*_{\lambda_0+\varepsilon}(\lambda_0)$ (la nozione di trasporto parallelo lungo una curva non deve dipendere dalla parameterizzazione della curva). Quindi, concludiamo che

$$\nabla_{gU} W = g \nabla_U W. \tag{53}$$

Dobbiamo anche chiedere che le derivate covarianti in un certo punto P in diverse direzioni abbiano la proprietà additiva:

$$(\nabla_U W)_P + (\nabla_V W)_P = (\nabla_{U+V} W)_P. \tag{54}$$

Quindi, per campi vettoriali U, V, W e funzioni scalari f, g abbiamo

$$\nabla_{fU+gV} W = f \nabla_U W + g \nabla_V W. \tag{55}$$

Definizione 6.2.

Il tensore ∇W di tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ il cui valore su una 1-forma $\tilde{\omega}$ e un vettore U è

$$\nabla W(\tilde{\omega}, U) = \langle \tilde{\omega}, \nabla_U W \rangle$$

si chiama gradiente di W.

Il fatto che ∇W è un campo tensoriale significa che siamo stati capaci di rimuovere la nozione di curva dalla definizione della derivata covariante. Il tensore ∇W è stato definito solo usando il vettore W e la connessione. Tuttavia, la derivata covariante ∇ non è un tensore perché $\nabla(fW) \neq f \nabla W$, come ci dice l'equazione (50).

6.1 Componenti: derivate covarianti della base

La connessione affine può essere caratterizzata dalle derivate dei vettori di una base.

Definizione 6.3.

Definiamo

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ji} e_k. \tag{56}$$

Le funzioni Γ^k_{ji} si chiamano simboli di Christoffel. Per i pedici i, j fissi Γ^k_{ji} è la k-esima componente del campo vettoriale $\nabla_{e_i} e_j$. Notiamo che il secondo pedice di Γ è associato con la derivata.

In una varietà n-dimensionale, le n^3 funzioni Γ^k_{ji} definiscono completamente la connessione affine. I simboli Γ^k_{ji} non sono componenti di un tensore: sotto una trasformazione di base gli indici k e i si trasformano come indici tensoriali, ma non è cosi per l'indice j.

Per la base duale di 1-forme

$$\langle \tilde{\omega}^j, e_k \rangle = \delta^j_k.$$

Quindi,

$$\langle \nabla_i \tilde{\omega}^j, e_k \rangle = -\langle \tilde{\omega}^j, \nabla_i e_k \rangle = -\Gamma^j_{ki}.$$

Ora, possiamo trovare le derivate di tensori arbitrari. Per esempio, se $U = \frac{d}{d\lambda}$, allora

$$\nabla_U V = U^i \nabla_{e_i}(V^j e_j) = U^i (\nabla_{e_i} V^j) e_j + U^i V^j \nabla_{e_i} e_j.$$

Nel primo termine, V^j è semplicemente una funzione, quindi, $U^i \nabla_i (V^j) = \frac{dV^j}{d\lambda}$. Allora abbiamo

$$\nabla_U V = \frac{dV^j}{d\lambda} e_j + U^i V^j \Gamma^k_{ji} e_k = \left(\frac{dV^j}{d\lambda} + \Gamma^j_{ki} V^k U^i \right) e_j.$$

L'espressione finale può essere riscritta come

$$(\nabla V)^j_i = \nabla_i (V^j) + \Gamma^j_{ki} V^k.$$

Diamo anche alcune altre formule. Per una 1-forma $\tilde{\omega}$:

$$(\nabla \tilde{\omega})_{ij} \equiv \omega_{i,j} - \Gamma^k_{ij} \omega_k.$$

Per un tensore T di tipo $\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} T^{i \cdots j}_{k \cdots l;m} &= T^{i \cdots j}_{k \cdots l,m} + \Gamma^i_{nm} T^{n \cdots j}_{k \cdots l} + \cdots \\ &+ \Gamma^j_{nm} T^{i \cdots n}_{k \cdots l} - \Gamma^n_{km} T^{i \cdots j}_{n \cdots l} - \cdots - \Gamma^n_{lm} T^{i \cdots j}_{k \cdots n}. \end{aligned}$$

6.2 Torsione

Le due quantità $[U, V]$ e $\nabla_U V - \nabla_V U$ sono entrambi campi vettoriali ed entrambi sono antisimmetrici in U e V.

Definizione 6.4.

Una connessione affine è detta simmetrica se

$$\nabla_U V - \nabla_V U = [U, V].$$

In una base di coordinate una connessione è simmetrica se e solo se

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}.$$

Definizione 6.5.

Per una connessione non-simmetrica definiamo la torsione:

$$\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i - [e_i, e_j] \equiv T^k_{ji} e_k.$$

Teorema 6.1.

La torsione è un tensore di tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dimostrazione

Dimostriamo che

$$T(\ ; U, V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V]$$

soddisfa alla relazione:

$$T(\ ; gU, V) = gT(\ ; U, V).$$

Davvero,

$$\begin{aligned} &\nabla_{gU} V - \nabla_V gU - [gU, V] = g\nabla_U V - g\nabla_V U \\ &-U\nabla_V g - g[U, V] + U(Vg) = g(\nabla_U V - \nabla_V U - [U, V]) = gT(\ ; U, V), \end{aligned}$$

visto che $\nabla_V g = Vg$.

Teorema 6.2.

Nel caso di una connessione simmetrica, in ogni espressione per la derivata di Lie, le derivate ordinarie possono essere sostituite da quelle covarianti.

Dimostrazione

Questo è vero automaticamente per i scalari. Per i vettori questo segue dalla definizione della connessione simmetrica. Per gli altri tensori questo segue dalla regola di Leibniz.

6.3 Curve geodetiche e le coordinate normali

Definizione 6.6.

Una curva geodetica è una curva lungo la quale si sposta parallelamente il suo proprio vettore tangente:

$$\nabla_U U = 0.$$

Definizione 6.7.

Coordinate normali sono le coordinate lungo una geodetica, che attraversano un certo punto P. In queste coordinate $\Gamma^k_{ij}(P) = 0$.

6.4 Tensore di Riemann

Theorema 6.3.

L'operatore

$$R(U, V) \equiv [\nabla_U, \nabla_V] - \nabla_{[U,V]}$$

è un operatore moltiplicativo

$$R(U, V) fW = f R(U, V) W.$$

Di più, esso non dipende neanche dalle derivate dei campi vettoriali U e V.

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
&R(U,V)fW = \nabla_U\nabla_V fW - \nabla_V\nabla_U fW - \nabla_{[U,V]}fW \\
&= f\nabla_U\nabla_V W + \nabla_U W(\nabla_V f) + \nabla_V W(\nabla_U f) + W\nabla_U\nabla_V f \\
&-f\nabla_V\nabla_U W - \nabla_V W(\nabla_U f) - \nabla_U W(\nabla_V f) - W\nabla_V\nabla_U f \\
&-([U,V]f)W - f\nabla_{[U,V]}W \\
&= f(\nabla_U\nabla_V W - \nabla_V\nabla_U W - \nabla_{[U,V]}W) \\
&+(\nabla_U\nabla_V f - \nabla_V\nabla_U f - [U,V]f)W.
\end{aligned}$$

Notiamo, che $\nabla_U f = Uf$ ed è ancora una funzione scalare. Quindi, $\nabla_U\nabla_V f = UVf$. Usando questa uguaglianza, si vede che l'espressione nell'ultima riga dell'equazione precedente sparisce e, quindi, arriviamo a

$$R(U,V)fW = fR(U,V)W.$$

Poi,

$$\begin{aligned}
&R(fU,V)W = \nabla_{fU}\nabla_V W - \nabla_V\nabla_{fU}W - \nabla_{[fU,V]}W \\
&= f\nabla_U\nabla_V W - f\nabla_V\nabla_U W - (\nabla_V f)\nabla_U W - f\nabla_{[U,V]}W + +(Vf)\nabla_U W \\
&= fR(U,V)W + (Vf)\nabla_U W - (\nabla_V f)\nabla_U W = fR(U,V)W.
\end{aligned}$$

Le componenti del tensore di Riemann R^l_{kij} sono definite come

$$[\nabla_{e_i}, \nabla_{e_j}]e_k - \nabla_{[e_i,e_j]}e_k = R^l_{kij}e_l. \tag{57}$$

In una base olonoma

$$R^l_{kij} = \Gamma^l_{kj,i} - \Gamma^l_{ki,j} + \Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi} - \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{mj}. \tag{58}$$

In una base non-olonoma

$$R^l_{kij} = e_i\Gamma^l_{kj} - e_j\Gamma^l_{ki} + \Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi} - \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{mj} - C^m_{ij}\Gamma^l_{km}, \tag{59}$$

dove i coefficienti di non-olonomità sono definiti come al solito: $[e_i, e_j] = C^m_{ij}e_m$.

Ovviamente, i coefficienti del tensore di Riemann sono antisimmetrici rispetto ai due ultimi pedici (questo segue subito dalla loro definizione (57)):

$$R^l_{kij} = -R^l_{kji}. \tag{60}$$

Dimostriamo anche che

$$R^l_{[kij]} = 0. \tag{61}$$

In questo caso è utile usare le coordinate normali, quando in un certo punto P i coefficienti di Christoffel sono uguali a zero. Allora

$$R^l_{kij} = \Gamma^l_{kj,i} - \Gamma^l_{ki,j}$$

$$\begin{aligned} &3R^l_{[kij]} = R^l_{kij} + R^l_{ijk} + R^l_{jki} \\ &= \Gamma^l_{kj,i} - \Gamma^l_{ki,j} + \Gamma^l_{ik,j} - \Gamma^l_{ij,k} + \Gamma^l_{ji,k} - \Gamma^l_{jk,i} = 0. \end{aligned} \tag{62}$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato la simmetria rispetto ai pedici dei simboli di Christoffel in assenza di torsione ed in una base olonoma.

6.5 Compatibilità tra la connessione affine, la n-forma di volume e metrica

La divergenza definita mediante una n-forma di volume $\tilde{\omega}$ è

$$L_V \tilde{\omega} = (\mathrm{div}_{\tilde{\omega}} V)\tilde{\omega}.$$

La divergenza covariante è

$$\mathrm{div} V = \nabla \cdot V = \nabla_i V^i.$$

La condizione della compatibilità è

$$\mathrm{div}_{\tilde{\omega}} V = \nabla_i V^i.$$

Dimostriamo che ∇ e $\tilde{\omega}$ sono compatibili se e solo se

$$\nabla \tilde{\omega} = 0.$$

Davvero,

$$\begin{aligned} &(L_V \tilde{\omega})_{i_1 \cdots i_n} = \tilde{\omega}_{i_1 \cdots i_n ; j} V^j + \tilde{\omega}_{m i_2 \cdots i_n} V^m_{;i_1} + \cdots + \tilde{\omega}_{i_1 \cdots m} V^m_{;i_n} \\ &= \tilde{\omega}_{i_1 \cdots i_n ; j} V^j + \tilde{\omega}_{i_1 i_2 \cdots i_n} V^{i_1}_{;i_1} + \cdots + \tilde{\omega}_{i_1 \cdots i_n} V^{i_n}_{;i_n} \\ &= \tilde{\omega}_{i_1 \cdots i_n ; j} V^j + \tilde{\omega}_{i_1 i_2 \cdots i_n} V^m_{;m}. \end{aligned}$$

Da qui immediatamente segue che $\nabla\tilde{\omega} = 0$ è la condizione necessaria e sufficiente per garantire la coincidenza delle due definizioni della divergenza covariante.

Inoltre, se usiamo una base di coordinate, abbiamo $\omega_{12\cdots n} = f$. La derivata covariante ∇ e la forma $\tilde{\omega}$ sono compatibili se e solo se $(\ln f)_{,k} = \Gamma^j_{jk}$.

Davvero,

$$\omega_{i\cdots k;l} = \omega_{i\cdots k,l} - \Gamma^m_{ml}\omega_{i\cdots k} = (f_{,l} - f\Gamma^m_{ml})\varepsilon_{i\cdots k}.$$

Quindi,

$$\frac{f_{,k}}{f} = \Gamma^m_{mk}.$$

La metrica e la derivata covariante sono compatibili se e solo se il prodotto scalare di due vettori non cambia a causa del trasporto parallelo. Questo succede se la derivata covariante del tensore metrico è uguale a zero. Infatti,

$$\nabla(g(A,B) = (\nabla g)(A,B) + g(\nabla A, B) + g(A, \nabla B) = 0.$$

Poiché $\nabla A = \nabla B = 0$ per la definizione del trasporto parallelo, $\nabla g = 0$. In una base arbitraria, introduciamo

$$g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Allora

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_k} g_{ij} = e_k g_{ij} = g(\nabla_{e_k} e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_{e_k} e_j) \\ &= g(\Gamma^n_{ik} e_n, e_j) + g(e_i, \Gamma^n_{jk} e_n) \\ &= \Gamma^n_{ik} g_{nj} + \Gamma^n_{jk} g_{in}. \end{aligned} \tag{63}$$

Ora, è conveniente rappresentare i coefficienti della connessione affine come

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{(ij)} + \Gamma^k_{[ij]}, \tag{64}$$

laddove la parte antisimmetrica di Γ^k_{ij} è

$$\Gamma^k_{[ij]} = \frac{1}{2}C^k_{ji} + \frac{1}{2}T^k_{ij}.$$

Riscrivendo la relazione (63) per diverse combinazioni di pedici, abbiamo

$$\begin{aligned} g_{ij,k} &= \Gamma^n_{ik} g_{nj} + \Gamma^n_{jk} g_{in}, \\ g_{ik,j} &= \Gamma^n_{ij} g_{nk} + \Gamma^n_{kj} g_{in}, \\ g_{kj,i} &= \Gamma^n_{ki} g_{nj} + \Gamma^n_{ji} g_{kn}. \end{aligned} \tag{65}$$

La combinazione delle uguaglianze (65) dà

$$g_{kj,i} + g_{ik,j} - g_{ij,k} = 2g_{nj}\Gamma^n_{[ki]} + 2g_{in}\Gamma^n_{[kj]} + 2g_{kn}\Gamma^n_{(ij)}. \tag{66}$$

Dall'ultima equazione segue che

$$\Gamma^m_{(ij)} = \frac{1}{2}g^{mk}(g_{kj,i} + g_{ik,j} - g_{ij,k})$$
$$+g^{mk}g_{nj}\Gamma^n_{[ik]} + g^{mk}g_{in}\Gamma^n_{[jk]}. \tag{67}$$

Finalmente,

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}g^{mk}(g_{kj,i} + g_{ik,j} - g_{ij,k})$$
$$+\frac{1}{2}(g^{mk}g_{nj}C^n_{ki} + g^{mk}g_{in}C^n_{kj} + C^m_{ji})$$
$$+\frac{1}{2}(g^{mk}g_{nj}T^n_{ik} + g^{mk}g_{in}T^n_{jk} + T^m_{ij}). \tag{68}$$

Nel caso quando la torsione è assente sparisce la terza riga nell'espressione (68). Quando la base è olonoma, sparisce la seconda riga. Quando la base è scelta in tal modo che i coefficienti metrici non dipendono dalle coordinate (per esempio, la base di tetrade $g_{ij} = \eta_{ij}$), sparisce la prima riga.

È interessante considerare il caso senza torsione usando una base, dove i coefficienti metrici sono costanti ed anche i coefficienti di non-olonomità sono costanti. In questo caso i coefficienti della connessione affine sono costanti e sono uguali a

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}(g^{mk}g_{nj}C^n_{ki} + g^{mk}g_{in}C^n_{kj} + C^m_{ji}). \tag{69}$$

Sostituendo la formula (69) nella formula (59), otteniamo

$$R^l_{kij} = \frac{1}{4}[C^m_{ij}C^l_{km} - g_{kp}g^{lq}C^m_{ij}C^p_{qm}$$
$$+g_{kp}g^{mq}(c^p_{qj}C^l_{im} - C^p_{qi}C^l_{jm}) + g_{jp}g^{ql}C^m_{kq}C^p_{im}$$
$$+g_{mp}g^{lq}(C^p_{qi}C^m_{jk} - C^p_{qj}C^m_{ik}) + g_{ip}g^{lq}C^m_{qk}C^p_{jm}$$
$$+g_{jp}g^{mq}C^p_{qk}C^l_{im} - g_{ip}g^{mq}C^p_{qk}C^l_{jm} - 2g_{pm}g^{ql}C^p_{qk}C^m_{ij}$$
$$+g^{mr}g^{ql}(g_{kp}g_{is}C^p_{rj} + g_{jp}g_{is}C^p_{rk} - g_{kp}g_{js}C^p_{ri} - g_{ip}g_{js}C^p_{rk})C^s_{qm}]. \tag{70}$$

Ma la quantitá che entra nelle equazioni di Einstein della relatività generale sono le componenti del tensore di Ricci

$$R_{kj} \equiv R^i_{kij}. \tag{71}$$

Facendo la contrazione nella formula (70) otteniamo

$$\begin{aligned}R_{kj} = &\frac{1}{2}(C^m_{ij}C^i_{km} + g_{kp}g^{mq}C^p_{qj}C^i_{im} \\ &+g_{jp}g^{mq}C^p_{qk}C^i_{im} + g_{mp}g^{iq}C^p_{kq}C^m_{ij} \\ &+\frac{1}{2}g^{mr}g^{qi}g_{kp}g_{js}C^p_{ir}C^s_{qm}).\end{aligned} \tag{72}$$

L'ultima formula sarà molto utile per lo studio dei modelli cosmologici spazialmente omogenei.

6.6 Tensore di curvatura metrico

In assenza di torsione e per il tensore di curvatura compatibile con il tensore metrico esistono altri vincoli sui valori delle sue componenti. Scegliendo le coordinate normali avremo

$$R_{ijkl} \equiv g_{im}R^m_{jkl} = \frac{1}{2}(g_{il,jk} - g_{ik,jl} + g_{jk,il} - g_{jl,ik}). \tag{73}$$

Da qui segue

$$R_{ijkl} = R_{klij}. \tag{74}$$

Il numero di coppie di indici ij o kl è uguale a $n(n-1)/2$. Il numero delle componenti con due coppie uguali di tipo R_{ikik} è $n(n-1)/2$. Il numero delle componenti con due coppie di indici diverse è

$$\frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{n(n-1)}{2} - 1\right] \times \frac{1}{2} = \frac{n^2(n-1)^2}{8} - \frac{n(n-1)}{4}.$$

Quindi, abbiamo

$$\frac{n^2(n-1)^2}{8} - \frac{n(n-1)}{4} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}.$$

L'identità ciclica $R_{i[kmn]} = 0$ è non-banale quando tutti e quattro pedici sono diversi. Abbiamo, quindi

$$C^4_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

vincoli. Finalmente, il numero delle componenti del tensore di Riemann metrico è

$$\frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n+2) - \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{12}n^2(n^2-1).$$

6.7 Spazi massimamente simmetrici

Le equazioni di Killing per i campi di Killing che lasciano la metrica invariante possono essere scritte come

$$\nabla_{(i}\xi_{j)} = 0 \tag{75}$$

o

$$\partial_{(i}\xi_{j)} = \Gamma^n_{ij}\xi_n. \tag{76}$$

In uno spazio di n dimensioni, l'equazione (76) è un sistema di $n(n+1)/2$ relazioni che sovraddeterminano n campi vettoriali. Ma se una soluzione esiste, si può mostrare che il campo vettoriale di Killing è determinato univocamente se in un punto P è dato l'insieme $\xi_i, \partial_{[i}\xi_{j]}$.

L'equazione di Killing ci dice che la metrica g è invariante rispetto ad un certo campo vettoriale X, cioè

$$L_X g = 0. \tag{77}$$

Campi vettoriali di Killing di una certa varietà differenziabile M costituiscono un'algebra di Lie. Davvero, se due campi X ed Y sono campi di Killing, allora lo è anche il campo $[X, Y]$:

$$L_{[X,Y]}g = (L_X L_Y - L_Y L_X)g = 0.$$

Il corrispondente gruppo di Lie si chiama gruppo di isometrie della varietà M. Non tutte le varietà hanno un gruppo di isometrie. Poniamoci una domanda: quale è il numero massimo di campi vettoriali di Killing, linearmente indipendenti che può avere una varietà ? Per cominciare, consideriamo un esempio semplice: lo spazio $\mathbb{R}^n$. L'equazione di Killing per le componenti della metrica g_{ij} ha la forma

$$g_{ij,k}X^k + g_{ik}X^k_{,j} + g_{jk}X^k_{,i} = 0. \tag{78}$$

Nel caso di una base olonoma $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ in $\mathbb{R}^n$ le componenti della metrica sono

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

e l'equazione di Killing (78) diventa

$$X_{i,j} + X_{j,i} = 0. \tag{79}$$

Dimostriamo che le seconde derivate delle componenti dei vettori di Killing, che soddisfano l'equazione (79) sono uguali a zero. Differenziando l'equazione (79) rispetto alla coordinata x^k, abbiamo

$$X_{i,jk} = -X_{j,ik}.$$

Poi,

$$X_{i,jk} = -X_{j,ik} = -X_{j,ki} = X_{k,ji} = X_{k,ij} = -X_{i,kj} = -X_{i,jk}$$

e

$$X_{i,jk} = -X_{i,jk} = 0.$$

Quindi, le componenti dei vettori di Killing dello spazio $\mathbb{R}^n$ sono funzioni lineari di coordinate e possono essere presentate nella seguente forma. Abbiamo n vettori di Killing

$$X^{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{80}$$

che descrivono le traslazioni dello spazio $\mathbb{R}^n$ e $\frac{n(n-1)}{2}$ vettori

$$X^{(ij)} = x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{81}$$

che corrispondono alle rotazioni dello spazio $\mathbb{R}^n$ intorno all'origine del sistema di coordinate cartesiane. Queste rotazioni costituiscono un sottogruppo del gruppo di isometrie che si chiama gruppo di isotropia rispetto al punto $(0, \ldots, 0)$. Naturalmente, si può scegliere un'altra base di vettori di Killing che includera la sottoalgebra di Lie di traslazioni e il sottoalgebra di Lie di rotazioni rispetto ad un altro (arbitrario) punto dell spazio $\mathbb{R}^n$.

Il numero di tutti i campi di Killing è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$. Vogliamo dimostrare che questo è il numero massimale di campi di Killing che può avere una varietà differenziabile di dimensionalità n. Ma prima di dimostrarlo facciamo due commenti.

In fisica un ruolo importante ha lo spazio-tempo di Minkowski della relatività ristretta che rappresenta uno spazio $\mathbb{R}^4$ con le coordinate t, x, y, z e la metrica

$$g_{tt} = -g_{xx} = -g_{yy} = -g_{zz} = 1. \tag{82}$$

L'algebra di Lie di campi vettoriali di Killing in questo spazio-tempo si chiama algebra di Poincaré, il corrispondente gruppo di isometrie si chiama gruppo di Poincaré e i suoi generatori (campi vettoriali di base) di solito sono rappresentati nel modo seguente:

$$X^{(t)} = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{83}$$

che rappresenta lo spostamento rispetto al tempo;

$$X^{(x)} = \frac{\partial}{\partial x},\ X^{(y)} = \frac{\partial}{\partial y},\ X^{(z)} = \frac{\partial}{\partial z}, \tag{84}$$

che rappresentano le traslazioni spaziali;

$$X^{(xy)} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x},\ X^{(yz)} = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y},\ X^{(zx)} = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \tag{85}$$

che rappresentano le rotazioni spaziali;

$$X^{(tx)} = x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x},\ X^{(ty)} = y\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial y},\ X^{(tz)} = z\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial z}, \tag{86}$$

che rappresentato i boost spazio-temporali. Le rotazioni e i boost costituiscono un sottogruppo del gruppo di Poincaré che si chiama gruppo di Lorentz.

Ora dimostriamo che nel caso della connessione affine simmetrica, nelle espressioni per le derivate di Lie tutte le derivate possono essere sostituite con le derivate covarianti. Questo è ovviamente corretto quando le derivate agiscono su una funzione, perché in questo case entrambe, la derivata di Lie e la derivata covariante coincidono con la derivata parziale. Dimostriamo che questo è vero anche per i campi vettoriali.

$$(L_X Y)^i = X^k Y^i_{,k} - Y^k X^i_{,k} = X^k Y^i_{;k} - Y^k X^i_{;k} - \Gamma^i_{mk} X^k Y^m + \Gamma^i_{mk} X^m Y^k$$
$$= X^k Y^i_{;k} - Y^k X^i_{;k} + \Gamma^i_{mk}(X^m Y^k - X^k Y^m) = X^k Y^i_{;k} - Y^k X^i_{;k},$$

laddove abbiamo sfruttato la simmetria dei simboli di Christoffel.

Analogamente, per 1-forme abbiamo

$$(L_X\omega)_i = \omega_{i,k} X^k + \omega_k X^k_{,i} = \omega_{i;k} X^k + \omega_k X^k_{;i} + \Gamma^m_{ik}\omega_m X^k - \Gamma^k_{mi}\omega_k X^m$$
$$= \omega_{i;k} X^k + \omega_k X^k_{;i} + (\Gamma^m_{ik} - \Gamma^m_{ki})\omega_m X^k = \omega_{i;k} X^k + \omega_k X^k_{;i}.$$

La dimostrazione si generalizza facilmente per il caso di tensori arbitrari.

Quindi, l'equazione (78) può essere riscritta come

$$X_{i;j} + X_{j;i} = 0 \tag{87}$$

o

$$X_{i,j} + X_{j,i} - 2\Gamma^m_{ij} X_m = 0. \tag{88}$$

Quindi, abbiamo $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni differenziali di primo ordine. Dimostriamo, che le seconde derivate delle componenti dei vettori di Killing sono univocamente definite dai valori di prime derivate di queste componenti e dai valori di componenti stesse nel punto scelto. Calcoliamo la derivata dell'equazione (88) rispetto alla coordinata x^k. Otteniamo

$$X_{i,jk} + X_{j,ik} - 2\Gamma^m_{ij,k} X_m - 2\Gamma^m_{ij} X_{m,k} = 0. \tag{89}$$

Facendo le permutazioni cicliche dei pedici i, j e k otteniamo altre due equazioni:

$$X_{k,ij} + X_{i,kj} - 2\Gamma^m_{ki,j} X_m - 2\Gamma^m_{ki} X_{m,j} = 0 \tag{90}$$

e

$$X_{j,ki} + X_{k,ji} - 2\Gamma^m_{jk,i} X_m - 2\Gamma^m_{jk} X_{m,i} = 0. \tag{91}$$

Sommando le equazioni (89) e (90) e sottraendo l'equazione (91), otteniamo

$$X_{i,jk} = (\Gamma^m_{ij,k} + \Gamma^m_{ki,j} - \Gamma^m_{jk,i}) X_m + (\Gamma^m_{ij} X_{m,k} + \Gamma^m_{ki} X_{m,j} - \Gamma^m_{jk} X_{m,i}). \tag{92}$$

Questo significa che tutte le seconde derivate sono determinate dalle prime derivate e dai valori delle componenti dei vettori di Killing.

Inoltre, non possiamo scegliere liberamente i valori iniziali per le prime derivate, perché la combinazione simmetrica $X_{i,j} + X_{j,i}$ è determinata dai valori delle componenti come si vede dalle equazioni di Killing (88). Quindi come le condizioni iniziali per le equazioni di Killing possiamo scegliere n valori iniziali di componenti di un vettore e $n(n-1)/2$ combinazioni antisimmetriche delle sue prime derivate $X_{i,j} - X_{j,i}$. Questo definisce il numero massimale possibile di campi di Killing linearmente indipendenti: $\frac{n(n+1)}{2}$.

In uno spazio massimamente simmetrico $n(n-1)/2$ vettori di Killing costituiscono un'algebra di Lie di un sottogruppo di isotropia rispetto ad un punto mentre altri n campi vettoriali hanno un ruolo simile a quello dei generatori di traslazioni.

C'è anche un'altra classe di varietà differenziabili con le proprietà simmetriche particolari. Questi sono spazi con sottospazi massimamente simmetrici.

Un esempio di varietà di questo tipo sono modelli cosmologici di Friedmann. In questi modelli lo spazio-tempo viene descritto dall'intervallo

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2, \tag{93}$$

dove dl^2 è un intervallo spaziale. Si può richiedere che le sezioni spaziali dello spazio-tempo abbiano una simmetria massimale. In questo caso lo spazio avrà 6 vettori di Killing e si dice che questo spazio è omogeneo e isotropo. Ci sono tre diversi modelli di Friedmann: piatto, dove le sezioni spaziali sono spazi tridimensionali euclidei, chiuso, dove le sezioni spaziali sono le sfere tridimensionali S^3 e aperto, dove questi sezioni sono iperboloidi di curvatura costante. Nella prossima sottosezione consideriamo modelli piatti di Friedmann con alcuni dettagli.

6.8 Vettori di Killing in modelli di Friedmann piatti ed in modello di de Sitter

Consideriamo un mondo di Friedmann piatto:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{94}$$

Le componenti della metrica diverse da zero sono

$$g_{tt} = 1,\ g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = -a^2(t). \tag{95}$$

Le componenti della metrica inversa sono

$$g^{tt} = 1,\ g^{xx} = g^{yy} = g^{zz} = -\frac{1}{a^2(t)}. \tag{96}$$

I simboli di Christoffel sono

$$\Gamma^x_{tx} = \Gamma^y_{ty} = \Gamma^z_{tz} = \frac{\dot{a}}{a},\ \Gamma^t_{xx} = \Gamma^t_{yy} = \Gamma^t_{zz} = \dot{a}a, \tag{97}$$

dove il punto significa la derivata rispetto al tempo cosmico t.

Le equazioni di Killing avranno la seguente forma

$$X_{t,t} = 0, \tag{98}$$

$$X_{t,x} + X_{x,t} = 2\frac{\dot{a}}{a}X_x, \tag{99}$$

$$X_{t,y} + X_{y,t} = 2\frac{\dot{a}}{a}X_y, \tag{100}$$

$$X_{t,z} + X_{z,t} = 2\frac{\dot{a}}{a}X_z, \tag{101}$$

$$X_{x,x} = \dot{a}aX_t, \tag{102}$$

$$X_{y,y} = \dot{a}aX_t, \tag{103}$$

$$X_{z,z} = \dot{a}aX_t, \tag{104}$$

$$X_{x,y} + X_{y,x} = 0, \tag{105}$$

$$X_{y,z} + X_{z,y} = 0, \tag{106}$$

$$X_{z,x} + X_{x,z} = 0. \tag{107}$$

Ora consideriamo diverse leggi dell'espansione dell'universo date dalla forma della funzione $a(t)$.

Nel caso quando l'universo è statico $\dot{a} = 0$, le equazioni (98)–(107) si trasformano nelle equazioni di Killing per lo spazio di Minkowski e ci saranno 10 campi di Killing (83)–(86) che costituiscono l'algebra di Lie del gruppo di Poincaré.

Se $\dot{a} \neq 0$, allora, integrando l'equazione (102) avremo

$$X_x = \dot{a}a \int X_t(x, y, z)dx + \tilde{X}_x(y, z, t). \tag{108}$$

Sostituendo l'espressione (119) nell'equazione (99) otteniamo

$$X_{t,x} + (\ddot{a}a - \dot{a}^2) \int X_t(x, y, z)dx + \left(\dot{\tilde{X}}_x(y, z, t) - 2\frac{\dot{a}}{a}\tilde{X}_x(y, z, t)\right) = 0. \tag{109}$$

Calcolando la derivata dell'equazione (109) rispetto al tempo e usando il fatto che X_t non dipende dal tempo, otteniamo

$$\frac{d(\ddot{a}a - \dot{a}^2)}{dt} \int X_t(x, y, z)dx = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\tilde{X}}_x(y, z, t) - 2\frac{\dot{a}}{a}\tilde{X}_x(y, z, t)\right). \tag{110}$$

Si vede che il primo membro dell'ultima equazione dipende da x e il secondo membro non dipende. Quindi entrambi membri devono essere uguali a zero. Ci sono tre opzioni che garantiscono annullamento del primo membro dell'equazione (110):

1. $X_t = 0$, $a(t)$-arbitrario;

2. $\ddot{a}a - \dot{a}^2 = A^2 = costante \neq 0$;
3. $\ddot{a}a - \dot{a}^2 = 0$.

La prima scelta riduce il sistema di equazioni di Killing (98)–(107) al sistema di equazioni di Killing nello spazio euclideo tridimensionale. Le sue soluzioni sono ovviamente tre vettori che corrispondono alle traslazioni e tre vettori che descrivono le rotazioni. Non c'é l'invarianza rispetto alle traslazioni temporali e rispetto ai boost.

Nel caso della seconda scelta, possiamo calcolare la derivata dell'equazione (109) rispetto a x arrivando all'equazione

$$X_{t,xx} - A^2 X_t = 0, \tag{111}$$

la cui soluzione generale è

$$X_t = (B_1 \exp(Ax) + B_2 \exp(-Ax))\tilde{X}_t(y,z). \tag{112}$$

È facile capire che la dipendenza di X_t da y e z è analoga a quella da x e, quindi,

$$\begin{aligned} X_t = {} & (B_1 \exp(Ax) + B_2 \exp(-Ax))(C_1 \exp(Ay) + C_2 \exp(-Ay)) \\ & \times (D_1 \exp(Az) + D_2 \exp(-Az)). \end{aligned} \tag{113}$$

Sostituendo l'espressione (113) all'equazione (102), otteniamo

$$\begin{aligned} X_x = {} & \dot{a}a \frac{1}{A}(B_1 \exp(Ax) - B_2 \exp(-Ax))(C_1 \exp(Ay) + C_2 \exp(-Ay)) \\ & \times (D_1 \exp(Az) + D_2 \exp(-Az)) + \tilde{X}_x(y,z,t) \end{aligned} \tag{114}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} X_y = {} & \dot{a}a \frac{1}{A}(B_1 \exp(Ax) + B_2 \exp(-Ax))(C_1 \exp(Ay) - C_2 \exp(-Ay)) \\ & \times (D_1 \exp(Az) + D_2 \exp(-Az)) + \tilde{X}_y(x,z,t). \end{aligned} \tag{115}$$

Sostituendo le espressioni (114) e (115) all'equazione (105) otteniamo

$$\begin{aligned} & \dot{a}a(B_1 \exp(Ax) - B_2 \exp(-Ax))(C_1 \exp(Ay) - C_2 \exp(-Ay)) \\ & \times (D_1 \exp(Az) + D_2 \exp(-Az)) \\ & + \tilde{X}_{x,y}(y,z,t) + \tilde{X}_{y,x}(x,z,t) = 0. \end{aligned} \tag{116}$$

Il primo addendo in questa equazione è un prodotto di funzioni di x, di y e di z e non può essere compensato dalla somma del secondo e del terzo addendo. Quindi, dobbiamo ancora una volta chiedere che $X_t = 0$ e tornare al caso dell'universo di Friedmann piatto con i sei vettori di Killing.

Nel caso della terza scelta, la funzione $a(t)$ soddisfa l'equazione

$$\ddot{a}a - \dot{a}^2 = 0, \tag{117}$$

la quale ha una soluzione generale

$$a(t) = \exp\left(\frac{t}{R}\right), \tag{118}$$

laddove R è una costante positiva. Notiamo, che nel limite $R \to \infty$, $a(t) \to 1$ e ci troviamo nello spazio-tempo di Minkowski.

Ovviamente, nel caso quando $R \neq \infty$ tutti i sei campi vettoriali di Killing del modello piatto di Friedmann sono presenti. Cerchiamo se possono esistere altri campi vettoriali di Killing. Sostituendo (118) nelle equazioni (99)–(104), otteniamo

$$X_{t,x} + X_{x,t} = \frac{2}{R}X_x, \tag{119}$$

$$X_{t,y} + X_{y,t} = \frac{2}{R}X_y, \tag{120}$$

$$X_{t,z} + X_{z,t} = \frac{2}{R}X_z, \tag{121}$$

$$X_{x,x} = \frac{1}{R}\exp\left(\frac{2t}{R}\right)X_t, \tag{122}$$

$$X_{y,y} = \frac{1}{R}\exp\left(\frac{2t}{R}\right)X_t, \tag{123}$$

$$X_{z,z} = \frac{1}{R}\exp\left(\frac{2t}{R}\right)X_t. \tag{124}$$

Cercheremo il vettore di Killing, la cui componente temporale è una costante, per esempio

$$X_t = 1. \tag{125}$$

Allora, le equazioni (119)–(121) danno

$$X_x = \exp\left(\frac{2t}{R}\right)\tilde{X}_x(x, y, z), \tag{126}$$

$$X_y = \exp\left(\frac{2t}{R}\right)\tilde{X}_y(x,y,z), \tag{127}$$

$$X_z = \exp\left(\frac{2t}{R}\right)\tilde{X}_z(x,y,z). \tag{128}$$

Sostituendo le espressioni (126)–(128) nelle equazioni (122)–(124), possiamo vedere che le funzioni

$$\tilde{X}_x = \frac{x}{R},\ \tilde{X}_y = \frac{y}{R},\ \tilde{X}_z = \frac{z}{R} \tag{129}$$

soddisfano queste equazioni e inoltre loro soddisfano anche le equazioni (105)–(107). Quindi, abbiamo trovato un altro campo vettoriale di Killing:

$$X^{(t)} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{R}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{130}$$

Nel limite $R \to \infty$ quando lo spazio-tempo diventa lo spazio-tempo di Minkowski, il vettore (130) diventa il generatore degli spostamenti temporali.

Cerchiamo ora il campo vettoriale di Killing, la cui componente temporale è

$$X_t = x. \tag{131}$$

Ora le equazioni (119)–(124) diventano

$$1 + X_{x,t} = \frac{2}{R}X_x, \tag{132}$$

$$X_{y,t} = \frac{2}{R}X_y, \tag{133}$$

$$X_{z,t} = \frac{2}{R}X_z, \tag{134}$$

$$X_{x,x} = \frac{1}{R}\exp\left(\frac{2t}{R}\right)x, \tag{135}$$

$$X_{y,y} = \frac{1}{R}\exp\left(\frac{2t}{R}\right)x, \tag{136}$$

$$X_{z,z} = \frac{1}{R}\exp\left(\frac{2t}{R}\right)x. \tag{137}$$

Dalle equazioni (133) e (134) troviamo

$$X_y = \exp\left(\frac{2t}{R}\right)\tilde{X}_y(x,y,z) \tag{138}$$

e

$$X_x = \exp\left(\frac{2t}{R}\right)\tilde{X}_z(x,y,z). \tag{139}$$

È facile controllare che scegliendo

$$\tilde{X}_y = \frac{xy}{R},\ \tilde{X}_z = \frac{xz}{R} \tag{140}$$

riusciamo a soddisfare le equazioni (136) e (137). Inoltre, anche l'equazione (107) viene soddisfatta.

Soluzione generale dell'equazione (132) è

$$X_x = \frac{R}{2} + \exp\left(\frac{2t}{R}\right)\tilde{X}_x(x,y,z). \tag{141}$$

Sostituendo l'espressione (141) nell'equazione (135) otteniamo

$$\tilde{X}_x = \frac{x^2}{2R} + \bar{X}_x(y,x). \tag{142}$$

Sostituendo le espressione (140)–(142) nelle equazioni (105) e (106), troviamo

$$\bar{X}_x = -\frac{y^2+z^2}{2R}. \tag{143}$$

Finalmente, abbiamo trovato un altro campo vettoriale di Killing:

$$X^{(tx)} = x\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{y^2+z^2-x^2}{2R} - \frac{R}{2}\exp\left(-\frac{2t}{R}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{xy}{R}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{xz}{R}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{144}$$

Aggiungendo a questo vettore di Killing il vettore delle traslazioni $\frac{\partial}{\partial x}$ con il coefficiente $\frac{R}{2}$ e considerando il limite dell spazio-tempo di Minkowski $R \to \infty$ arriviamo al vettore di Killing di boost nel piano xt dell'algebra di Lie del gruppo di Poincaré $x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}$. Il vettore di Killing (144) descrive le trasformazioni speciali conformi. Altri due vettori di Killing di questo tipo sono

$$X^{(ty)} = y\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{x^2+z^2-y^2}{2R} - \frac{R}{2}\exp\left(-\frac{2t}{R}\right)\right)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{xy}{R}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{yz}{R}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{145}$$

$$X^{(tz)} = z\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{y^2+x^2-z^2}{2R} - \frac{R}{2}\exp\left(-\frac{2t}{R}\right)\right)\frac{\partial}{\partial z} - \frac{xz}{R}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{yz}{R}\frac{\partial}{\partial y}. \quad (146)$$

Abbiamo dimostrato che il modello di Friedmann piatto con la legge di espansione esponenziale (118) possiede 10 vettori di Killing e rappresenta uno spazio-tempo di simmetria massimale. Questo spazio-tempo si chiama spazio di de Sitter. Studieremo alcune delle sue proprietà nella sottosezione successiva.

6.9 Spazio di de Sitter

Consideriamo uno spazio euclideo $\mathbb{R}^5$ con le coordinate Y^0, Y^1, Y^2, Y^3, Y^4 e i coefficienti metrici

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1. \quad (147)$$

Consideriamo un iperboloide quadridimensionale immerso in questo spazio e definito dall'equazione

$$(Y^0)^2 - (Y^1)^2 - (Y^2)^2 - (Y^3)^2 - (Y^4)^2 = -R^2. \quad (148)$$

Si può parametrizzare queste 5 coordinate Y con 4 parametri t, x, y, z nel modo seguente

$$\begin{aligned}
Y^0 &= R\sinh\frac{t}{R} + \exp\left(\frac{t}{R}\right)\frac{x^2+y^2+z^2}{2R}, \\
Y^1 &= \exp\left(\frac{t}{R}\right)x, \\
Y^2 &= \exp\left(\frac{t}{R}\right)y, \\
Y^3 &= \exp\left(\frac{t}{R}\right)z, \\
Y^4 &= R\cosh\frac{t}{R} - \exp\left(\frac{t}{R}\right)\frac{x^2+y^2+z^2}{2R}. \quad (149)
\end{aligned}$$

La sostituzione delle formule (149) nell'equazione dell'iperboloide (148) mostra che quest'ultima viene soddisfatta. Ora, i differenziali delle coordinate $Y^0, \ldots, Y^4$

sono

$$\begin{aligned}
dY^0 &= \left(\cosh\frac{t}{R} + \exp\left(\frac{t}{R}\right)\frac{x^2+y^2+z^2}{2R^2}\right)dt \\
&+ \exp\left(\frac{t}{R}\right)\frac{xdx+ydy+zdz}{R}, \\
dY^1 &= \exp\left(\frac{t}{R}\right)\left(dx + \frac{x}{R}dt\right), \\
dY^2 &= \exp\left(\frac{t}{R}\right)\left(dy + \frac{y}{R}dt\right), \\
dY^3 &= \exp\left(\frac{t}{R}\right)\left(dz + \frac{z}{R}dt\right), \\
dY^4 &= \left(\sinh\frac{t}{R} - \exp\left(\frac{t}{R}\right)\frac{x^2+y^2+z^2}{2R^2}\right)dt \\
&- \exp\left(\frac{t}{R}\right)\frac{xdx+ydy+zdz}{R}.
\end{aligned} \tag{150}$$

Sostituendo le espressioni (150) nell'espressione per l'intervallo nello spazio di 5 dimensioni

$$ds^2 = (dY^0)^2 - (dY^1)^2 - (dY^2)^2 - (dY^3)^2 - (dY^4)^2, \tag{151}$$

otteniamo

$$ds^2 = dt^2 - \exp\left(\frac{2t}{R}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{152}$$

cioè l'intervallo per l'universo di Friedmann piatto, con la legge esponenziale dell'espansione, che è stato considerato nella sottosezione precedente.

Grazie all'alta simmetria dello spazio di de Sitter, possiamo introdurre le coordinate che lo rappresentano come l'universo di Friedmann chiuso o aperto con le leggi di espansione corrispondenti.

Introduciamo le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned}
Y^0 &= R\sinh\frac{t}{R},\\
Y^1 &= R\cosh\frac{t}{R}\sin\chi\sin\theta\cos\phi,\\
Y^2 &= R\cosh\frac{t}{R}\sin\chi\sin\theta\sin\phi,\\
Y^3 &= R\cosh\frac{t}{R}\sin\chi\cos\theta,\\
Y^4 &= R\cosh\frac{t}{R}\cos\chi,
\end{aligned}\tag{153}$$

dove la coordinata χ cambia tra 0 e π.

I differenziali delle coordinate $Y^0, \ldots, Y^4$ sono

$$\begin{aligned}
&dY^0 = \cosh\frac{t}{R}dt,\\
&dY^1 = \sinh\frac{t}{R}\sin\chi\sin\theta\cos\phi dt + R\cosh\frac{t}{R}\cos\chi\sin\theta\cos\phi d\chi\\
&+R\cosh\frac{t}{R}\sin\chi\cos\theta\cos\phi d\theta - R\cosh\frac{t}{R}\sin\chi\sin\theta\sin\phi d\phi,\\
&dY^2 = \sinh\frac{t}{R}\sin\chi\sin\theta\sin\phi dt + R\cosh\frac{t}{R}\cos\chi\sin\theta\sin\phi d\chi\\
&+R\cosh\frac{t}{R}\sin\chi\cos\theta\sin\phi d\theta + R\cosh\frac{t}{R}\sin\chi\sin\theta\cos\phi d\phi,\\
&dY^3 = \sinh\frac{t}{R}\sin\chi\cos\theta dt + R\cosh\frac{t}{R}\cos\chi\cos\theta d\chi\\
&-R\cosh\frac{t}{R}\sin\chi\sin\theta d\theta,\\
&dY^4 = \sinh\frac{t}{R}\cos\chi dt - R\cosh\frac{t}{R}\sin\chi d\chi.
\end{aligned}\tag{154}$$

Sostituendo queste espressioni in (151) otteniamo l'intervallo

$$ds^2 = dt^2 - R^2\cosh^2\frac{t}{R}(d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)),\tag{155}$$

che descrive un universo le qui sezioni spaziali sono delle sfere tridimensionali e che si espande secondo la legge

$$a(t) = R\cosh\frac{t}{R}.\tag{156}$$

Introducendo le coordinate iperboliche

$$\begin{aligned}
Y^0 &= R\sinh\frac{t}{R}\cosh\chi,\\
Y^1 &= R\sinh\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta\cos\phi,\\
Y^2 &= R\sinh\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta\sin\phi,\\
Y^3 &= R\sinh\frac{t}{R}\sinh\chi\cos\theta,\\
Y^4 &= R\cosh\frac{t}{R},
\end{aligned} \tag{157}$$

dove $0 < \chi < \infty$, con i differenziali

$$\begin{aligned}
& dY^0 = \cosh\frac{t}{R}\cosh\chi dt + R\sinh\frac{t}{R}\sinh\chi d\chi,\\
& dY^1 = \cosh\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta\cos\phi dt + R\sinh\frac{t}{R}\cosh\chi\sin\theta\cos\phi d\chi\\
& +R\sinh\frac{t}{R}\sinh\chi\cos\theta\cos\phi d\theta - R\sinh\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta\sin\phi d\phi,\\
& dY^2 = \cosh\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta\sin\phi dt + R\sinh\frac{t}{R}\cosh\chi\sin\theta\sin\phi d\chi\\
& +R\sinh\frac{t}{R}\sinh\chi\cos\theta\sin\phi d\theta + R\sinh\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta\cos\phi d\phi,\\
& dY^3 = \cosh\frac{t}{R}\sinh\chi\cos\theta dt + R\sinh\frac{t}{R}\cosh\chi\cos\theta d\chi\\
& -R\sinh\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta d\theta,\\
& dY^4 = \sinh\frac{t}{R}dt,
\end{aligned} \tag{158}$$

otteniamo l'intervallo

$$ds^2 = dt^2 - R^2\sinh^2\frac{t}{R}(d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)), \tag{159}$$

che descrive un universo aperto iperbolico che si espande secondo la legge

$$a(t) = R\sinh\frac{t}{R}. \tag{160}$$

Dimostriamo che l'intervallo

$$ds^2 = d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{161}$$

descrive un iperboloide tridimensionale. Consideriamo uno spazio $\mathbb{R}^4$ con l'intervallo

$$ds^2 = (dY^1) + (dY^2)^2 + (dY^3)^2 - (dY^4)^2 \tag{162}$$

e consideriamo in questo spazio una ipersuperficie, definita dall'equazione

$$(Y^1)^2 + (Y^2)^2 + (Y^3)^2 - (Y^4)^2 = -1. \tag{163}$$

Introduciamo le coordinate χ, θ e ϕ su questa superficie, che è niente altro che un iperboloide a due falde o iperboloide ellittico, come segue:

$$\begin{aligned}
Y^1 &= \sinh\chi \sin\theta \cos\phi, \\
Y^2 &= \sinh\chi \sin\theta \sin\phi, \\
Y^3 &= \sinh\chi \cos\theta, \\
Y^4 &= \cosh\chi.
\end{aligned} \tag{164}$$

I differenziali di queste coordinate sono

$$\begin{aligned}
dY^1 &= \cosh\chi \sin\theta \cos\phi d\chi + \sinh\chi \cos\theta \cos\phi d\theta - \sinh\chi \sin\theta \sin\phi d\phi, \\
dY^2 &= \cosh\chi \sin\theta \sin\phi d\chi + \sinh\chi \cos\theta \sin\phi d\theta + \sinh\chi \sin\theta \cos\phi d\phi, \\
dY^3 &= \cosh\chi \cos\theta d\chi - \sinh\chi \sin\theta d\theta, \\
dY^4 &= \sinh\chi d\chi.
\end{aligned} \tag{165}$$

Sostituendo i differenziali (165) nell'equazione (162), otteniamo l'intervallo (161).

Consideriamo ancora un altro sistema di coordinate nello spazio di de Sitter–le cosiddette coordinate statiche:

$$\begin{aligned}
Y^0 &= \sqrt{R^2 - r^2} \sinh\frac{t}{R}, \\
Y^1 &= r \sin\theta \cos\phi, \\
Y^2 &= r \sin\theta \sin\phi, \\
Y^3 &= r \cos\theta, \\
Y^4 &= \sqrt{R^2 - r^2} \cosh\frac{t}{R}.
\end{aligned} \tag{166}$$

I loro differenziali sono

$$
\begin{aligned}
dY^0 &= \frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\cosh\frac{t}{R}dt - \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\sinh\frac{t}{R}dr,\\
dY^1 &= \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi,\\
dY^2 &= \sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi,\\
dY^3 &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta,\\
dY^4 &= \frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\sinh\frac{t}{R}dt - \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\cosh\frac{t}{R}dr. \qquad (167)
\end{aligned}
$$

Sostituendo le espressioni (167) nell'equazione (151), otteniamo l'intervallo

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \qquad (168)$$

Esiste anche un altro spazio-tempo quadridimensionale con la simmetria massimale–lo spazio di anti-de Sitter.

Consideriamo uno spazio $\mathbb{R}^5$ con l'intervallo

$$ds^2 = (dY^0)^2 + (dY^4)^2 - (dY^1)^2 - (dY^2)^2 - (dY^3)^2, \qquad (169)$$

e introduciamo in questo spazio un'ipersuperficie definita dall'equazione

$$(Y^0)^2 + (Y^4)^2 - (Y^1)^1 - (Y^2)^2 - (Y^3)^2 = R^2. \qquad (170)$$

Scegliamo su questa ipersuperficie le coordinate

$$
\begin{aligned}
Y^0 &= R\cos\frac{t}{R},\\
Y^4 &= R\sin\frac{t}{R}\cosh\chi,\\
Y^1 &= R\sin\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta\cos\phi,\\
Y^2 &= R\sin\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta\sin\phi,\\
Y^3 &= R\sin\frac{t}{R}\sinh\chi\cos\theta. \qquad (171)
\end{aligned}
$$

I loro differenziali sono

$$
\begin{aligned}
dY^0 &= -\sin\frac{t}{R}dt,\\
dY^4 &= \cos\frac{t}{R}\cosh\chi dt + R\sin\frac{t}{R}\sinh\chi d\chi,\\
dY^1 &= \cos\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta\cos\phi dt + R\sin\frac{t}{R}\cosh\chi\sin\theta\cos\phi d\chi\\
&+R\sin\frac{t}{R}\sinh\chi\cos\theta\cos\phi d\theta - R\sin\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta\sin\phi d\phi,\\
dY^2 &= \cos\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta\sin\phi dt + R\sin\frac{t}{R}\cosh\chi\sin\theta\sin\phi d\chi\\
&+R\sin\frac{t}{R}\sinh\chi\cos\theta\sin\phi d\theta + R\sin\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta\cos\phi d\phi,\\
dY^3 &= \cos\frac{t}{R}\sinh\chi\cos\theta dt + R\sin\frac{t}{R}\cosh\chi\cos\theta d\chi\\
&-R\sin\frac{t}{R}\sinh\chi\sin\theta d\theta.
\end{aligned}
\tag{172}
$$

Sostituendo le espressioni (172) nell'equazione (169), otteniamo un'espressione per l'intervallo sull'iperboloide di anti-de Sitter:

$$ds^2 = dt^2 - R^2\sin^2\frac{t}{R}(d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)). \tag{173}$$

L'intervallo (173) rappresenta un universo di Friedmann aperto con le sezioni spaziali che hanno la geometria di un iperboloide a due falde e la cui evoluzione è descritta da una legge periodica

$$a(t) = R\sin\frac{t}{R}. \tag{174}$$

Notiamo, che non è possibile rappresentare lo spazio-tempo di anti-de Sitter nella forma di un universo di Friedmann chiuso o piatto.

Abbiamo considerato gli spazi con il gruppo di isometrie massimale come lo spazio-tempo di Minkowski, lo spazio-tempo di de Sitter e lo spazio-tempo di anti-de Sitter. Abbiamo considerato anche i modelli cosmologici di Friedmann dove le sezioni spaziali dello spazio-tempo hanno la simmetria massimale e dove esistono 6 campi vettoriali di Killing. Un altra classe delle varietà dove la simmetria ha un ruolo importante sono le cosmologie spazialmente omogenee, dove l'algebra di Lie del gruppo di isometrie contiene 3 campi vettoriali di Killing. Tale gruppo agisce sulle sezioni spaziali transitivamente, cioè per ogni due punti di una sezione esiste un elemento del gruppo di simmetria che trasforma un punto nell'altro. Per una descrizione di tali modelli cosmologici occorre introdurre il sistema di riferimento sincrono.

6.10 Sistema di riferimento sincrono

Consideriamo le varietà spazio-temporali con l'intervallo

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{175}$$

dove $\alpha = 1, 2, 3$. Il corrispondente sistema di riferimento si chiama "sincrono" e la coordinata temporale t si chiama "tempo cosmico". Nel sistema di riferimento sincrono le linee di tempo sono le geodetiche dello spazio-tempo quadridimensionale. Troviamo le espressioni per le componenti del tensore di Ricci in questo sistema, separando in esse le operazioni di derivazione spaziale da quelle di derivazione temporale. Poniamo

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}. \tag{176}$$

Il tensore κ si chiama <u>curvatura esterna</u> o <u>seconda forma fondamentale</u>. È facile controllare che

$$\begin{aligned}
&\kappa^\alpha_\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial \ln \gamma}{\partial t}, \\
&\Gamma^0_{00} = \Gamma^\alpha_{00} = \Gamma^0_{0\alpha} = 0, \\
&\Gamma^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta}, \ \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{1}{2}\kappa^\alpha_\beta, \ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma},
\end{aligned} \tag{177}$$

dove $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ sono i simboli di Christoffel tridimensionali dedotti dal tensore $\gamma_{\alpha\beta}$. Sostituendo le espressioni (177) nelle formule per le componenti del tensore di Ricci, otteniamo

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \kappa^\alpha_\alpha}{\partial t} - \frac{1}{4}\kappa^\beta_\alpha \kappa^\alpha_\beta, \\
R_{0\alpha} &= \frac{1}{2}(\kappa^\beta_{\alpha;\beta} - \kappa^\beta_{\beta;\alpha}), \\
R_{\alpha\beta} &= P_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial \kappa_{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{1}{4}(\kappa_{\alpha\beta}\kappa^\gamma_\gamma - 2\kappa^\gamma_\alpha \kappa_{\beta\gamma}).
\end{aligned} \tag{178}$$

Qui, il tensore $P_{\alpha\beta}$ è il tensore tridimensionale di Ricci costruito mediante le componenti metriche $\gamma_{\alpha\beta}$. Il simbolo "punto e virgola" sta per le derivate covarianti, calcolate con uso di simboli di Christoffel tridimensionali $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$.

6.11 Spazi omogenei e classificazione di Bianchi

Supponiamo che una varietà differenziabile spazio-temporale descritta dall'intervallo (175) abbia tre campi vettoriali di Killing spaziali. In questo caso le funzioni di struttura di questi campi non dipendono dalle coordinate e sono costanti. Comunque non è comodo scegliere questi tre campi come campi vettoriali di base, perché le componenti della metrica in questa base dipenderanno dalle coordinate. Ma si può trovare un'altra base di 3 vettori e_a che commutano con i vettori di Killing. Si può anche scegliere questi tre campi vettoriali in tal modo che le loro componenti metriche non dipendono dalle coordinate spaziali. Poi si può dimostrare che algebricamente il gruppo di trasformazioni generato da questi tre vettori (che si chiama gruppo reciproco al gruppo di isometrie) è equivalente al gruppo di isometrie. Dopo si può costruire la classificazione di tutti gli spazi omogenei di Bianchi, spostando la dipendenza dal tempo ai coefficienti metrici. Dopo si possono calcolare tutte le componenti del tensore di curvatura usando solo le componenti della metrica, le derivate temporali di coefficienti metrici e le costanti strutturali del gruppo di isometrie.

Supponiamo di avere 3 vettori di Killing tali che

$$[X_a, X_b] = C^c_{ab} X_c. \tag{179}$$

Cerchiamo 3 campi vettoriali e_a che commutano con i campi di Killing

$$[e_a, X_b] = 0. \tag{180}$$

Questi campi che costituiscono una base reciproca nell'algebra di campi vettoriali possono essere costruiti nel modo seguente. Scegliamo un punto P e chiediamo che in questo punto

$$e_a(P) = X_a(P). \tag{181}$$

Poi possiamo fare il trasporto di Lie dei campi e_a in altri punti dello spazio usando i campi vettoriali di Killing. In questo caso le relazioni (180) saranno rispettate e i campi e_a costituiranno un'algebra di Lie tridimensionale con le costanti strutturali D^c_{ab}:

$$[e_a, e_b] = D^c_{ab} e_c. \tag{182}$$

Vogliamo calcolare le costanti D^c_{ab}. Si possono rappresentare i campi vettoriali e_a come combinazioni lineari dei campi di Killing:

$$e_a = a^b_a X_b, \tag{183}$$

dove coefficienti a_a^b dipendono dalle coordinate e nel punto P sono

$$a_a^b(P) = \delta_a^b. \tag{184}$$

La condizione (180) ora ha la forma

$$[e_f, X_b] = [a_f^a X_a, X_b] = a_f^a C_{ab}^c X_c - (X_b a_f^c) X_c = 0. \tag{185}$$

Questo è equivalente a

$$a_f^a C_{ab}^c = (X_b a_f^c). \tag{186}$$

Nel punto P la relazione (186) diventa

$$(X_b a_f^c)(P) = C_{fb}^c. \tag{187}$$

La parentesi di Lie di vettori della base reciproca

$$\begin{aligned}[e_f, e_h] &= [a_f^a X_a, a_h^b X_b] = a_f^a a_h^b C_{ab}^c X_c + a_f^a (X_a a_h^b) X_b - a_h^b (X_b a_f^a) X_a \\ &= D_{fh}^p e_p = D_{fh}^p a_p^c X_c.\end{aligned} \tag{188}$$

Valutando la relazione (188) nel punto P e usando le equazioni (184) e (187), otteniamo

$$D_{fh}^p = -C_{fh}^p. \tag{189}$$

Questo significa che le algebre di Lie di tre vettori di Killing e di tre vettori della base reciproca coincidono.

Ora possiamo introdurre una base di 1-forme ω^a duale alla base di campi vettoriali e_a e considerare modelli cosmologici omogenei in un sistema di riferimento sincrono con un intervallo

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ab}(t)\omega^a\omega^b, \tag{190}$$

dove tutta la dipendenza dal tempo sta nelle funzioni $\gamma_{ab}(t)$. È facile vedere che questa metrica è invariante rispetto ai campi di Killing X_a. Le componenti di questa metrica nella base e_a non dipendono dalle coordinate spaziali, i coefficienti della non-olonomità C_{ab}^c sono costanti e, quindi, tutte le componenti del tensore di Ricci possono essere espresse tramite funzioni $\gamma_{ab}(t)$, le loro derivate temporali e i coefficienti C_{ab}^c senza entrare nei dettagli della dipendenza di vettori di base o di 1-forme della base duale dalle coordinate spaziali. I corrispondenti modelli cosmologici si chiamano cosmologie di Bianchi e per classificare tali cosmologie è necessario elencare tutte le algebre di Lie 3-dimensionali. Tale classificazione era proposta in un contesto algebraico da L. Bianchi alla fine del ottocento ed è stata applicata alla cosmologia negli anni cinquanta del novecento.

6.11.1 Classificazione di Bianchi

Consideriamo un'algebra di Lie tridimensionale con i coefficienti di struttura C^c_{ab} che soddisfano l'identità di Jacobi

$$C^f_{ab}C^d_{cf} + C^f_{bc}C^d_{af} + C^f_{ca}C^d_{bf} = 0. \tag{191}$$

È conveniente introdurre le matrici C^{dc} come

$$C^c_{ab} = \varepsilon_{abd}C^{dc}, \tag{192}$$

dove ε_{abc} è un simbolo di Levi-Civita. L'identità di Jacobi assume la forma

$$\varepsilon_{bcd}C^{cd}C^{ba} = 0. \tag{193}$$

Si può decomporre il tensore C^{ab} nelle parti simmetrica ed antisimmetrica

$$C^{ab} = n^{ab} + \varepsilon^{abc}a_c. \tag{194}$$

La sostituzione di questa espressione nella (193) conduce alla condizione

$$n^{ab}a_b = 0. \tag{195}$$

(Per dimostrare questa uguaglianza si usano le identità $\varepsilon_{abc}n^{bc} = 0,\ \varepsilon_{abc}\varepsilon^{bcd} = 2\delta^d_a,\ \varepsilon^{abc}a_b a_c = 0$.) Ora possiamo diagonalizzare il tensore simmetrico n^{ab} usando una trasformazione di base appropriata e di trasformarlo a

$$n^{ab} = \delta^{ab}n^a. \tag{196}$$

Senza perdere la generalità si può porre

$$a_b = \delta_{b1}a \tag{197}$$

e la relazione (195) si riduce a

$$n_1 a = 0, \tag{198}$$

cioè una delle grandezze a o n_1 deve annullarsi. Le regole di commutazione assumono la forma

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= -aX_2 + n_3X_3, \\
[X_2, X_3] &= n_1X_1, \\
[X_3, X_1] &= n_2X_2 + aX_3.
\end{aligned} \tag{199}$$

Ora siamo pronti a descrivere la classificazione di Bianchi delle algebre di Lie tridimensionali e dei corrispondenti modelli cosmologici spazialmente omogenei. Prima, consideriamo i casi quando

$$a = 0. \tag{200}$$

La prima scelta e che tutti e tre autovalori della matrice n^{ab} sono uguali a zero, cioè $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Questo significa che tutti i campi di Killing commutano tra loro. Questa algebra di Lie e la corrispondente famiglia di modelli cosmologici si chiama <u>Bianchi-I</u>. La seconda scelta: solo uno di autovalori di n è diverso da zero, si può sceglierlo come

$$n_1 = 1,\ n_2 = n_3 = 0. \tag{201}$$

L'unico commutatore di vettori di Killing diverso da zero è

$$[X_2, X_3] = X_1. \tag{202}$$

Questo modello (algebra di Lie) si chiama <u>Bianchi-II</u>. La prossima scelta è quando due autovalori di n sono diversi da zero ed hanno lo stesso segno:

$$n_1 = n_2 = 1,\ n_3 = 0. \tag{203}$$

Questo è un modello <u>Bianchi-VII ($a = 0$)</u>. Nel prossimo caso i due autovalori hanno i segni diversi:

$$n_1 = 1,\ n_2 = -1,\ n_3 = 0. \tag{204}$$

Questo è il tipo <u>Bianchi-VI ($a = 0$)</u>. Se tutti e tre autovalori sono uguali a 1:

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1, \tag{205}$$

allora abbiamo il tipo <u>Bianchi-IX</u>. Se uno di autovalori ha il segno negativo ed altri due sono positivi

$$n_1 = n_2 = 1,\ n_3 = -1, \tag{206}$$

abbiamo l'universo di tipo <u>Bianchi-VIII</u>.

Adesso consideriamo i casi quando $a \neq 0$. In questo caso, $n_1 = 0$ e abbiamo una certa libertà nel scegliere i valori di n_2 e n_3. Il caso

$$a = 1,\ n_1 = n_2 = n_3 = 0 \tag{207}$$

ci dà l'universo Bianchi-V. Il caso

$$a = 1,\ n_1 = n_2 = 0,\ n_3 = 1 \tag{208}$$

corrisponde al modello Bianchi-IV. Quando due autovalori di n sono diversi da zero

$$n_1 = 0,\ n_2 = n_3 = 1 \tag{209}$$

arriviamo ad una famiglia di modelli Bianchi-VII ($a \neq 0$). Quando il loro segni sono diversi e

$$a = 1,\ n_1 = 0,\ n_2 = 1,\ n_3 = -1, \tag{210}$$

abbiamo il modello Bianchi-III, e finalmente, quando

$$a \neq 1,\ a \neq 0,\ n_1 = 0,\ n_2 = 1,\ n_3 = -1, \tag{211}$$

otteniamo la famiglia di modelli Bianchi-VI ($a \neq 1$).

Il tipo I è lo spazio euclideo; tutte le componenti del tensore spaziale di curvatura si riducono a zero. Ovviamente, questo tipo contiene i due casi particolari: chiedendo l'indipendenza dei coefficienti metrici dal tempo arriviamo allo spazio di Minkowski; chiedendo isotropia, arriviamo al modello di Friedmann piatto.

Il tipo IX contiene il caso particolare dello spazio a curvatura positiva costante, che è niente altro che il modello di Friedmann chiuso.

Analogamente, il tipo V contiene come un caso particolare lo spazio a curvatura negativa costante (il modello di Friedmann aperto).

Mostriamo infine in che modo le equazioni di Einstein per un universo con uno spazio omogeneo si riducono al sistema di equazioni differenziali ordinarie, contenenti solo funzioni del tempo. Le equazioni di Einstein nel sistema sincrono si esprimono mediante i tensori tridimensionali κ_{ab} e P_{ab}. Per il primo tensore abbiamo semplicemente

$$\kappa_{ab} = \dot{\gamma}_{ab}, \kappa_a^b = \dot{\gamma}_{ac}\gamma^{cb}. \tag{212}$$

Per quanto concerne le componenti di P_{ab}, esse si possono esprimere mediante le grandezze γ_{ab} e le costanti di struttura:

$$P_a^b = \frac{1}{2\gamma}[2C^{bd}C_{ad} + C^{db}C_{ad} + C^{bd}C_{da} - C^d{}_d(C^b{}_a + C_a{}^b)$$
$$+\delta_a^b((C^d{}_d)^2 - 2C^{df}C_{df})], \tag{213}$$

dove

$$C_a{}^b = \gamma_{ac} C^{cb}, \ C_{ab} = \gamma_{ac}\gamma_{bd} C^{cd}. \tag{214}$$

Le espressioni definitive per le componenti del tensore di Ricci sono

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}\dot{\kappa}_a^a - \frac{1}{4}\kappa_a^b \kappa_b^a, \tag{215}$$

$$R_a^0 = -\frac{1}{2}\kappa_b^a (C_{ca}^b - \delta_a^b C_{dc}^d), \tag{216}$$

$$R_a^b = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}(\sqrt{\gamma}\kappa_a^b)^{\cdot} - P_a^b. \tag{217}$$

Sottolineamo che per scrivere le equazioni di Einstein non c'è quindi bisogno di utilizzare le espressioni esplicite per i campi vettoriali di base come funzioni di coordinate spaziali.

6.12 Modello cosmologico Bianchi-I

Consideriamo in alcuni dettagli il modello cosmologico di tipo Bianchi-I. Come già è stato detto, tutte le costanti di struttura in questo modello sono uguali a zero. Quindi, è facile scrivere la forma esplicita dei vettori di Killing, dei vettori della base reciproca e delle 1-forme della base duale:

$$\begin{aligned} & X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \ X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \ X_3 = \frac{\partial}{\partial z}; \\ & e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \ e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \ e_3 = \frac{\partial}{\partial z}; \\ & \omega^1 = dx, \ \omega^2 = dy, \ \omega^3 = dz. \end{aligned} \tag{218}$$

Scegliendo la matrice $\gamma_{ab}(t)$ nella forma diagonale, si può presentare l'intervallo per universi di tipo Bianchi-I come

$$ds^2 = dt^2 - (a^2(t)dx^2 + b^2(t)dy^2 + c^2(t)dz^2). \tag{219}$$

Quindi, la curvatura esterna(176) ha le componenti

$$\kappa_{11} = 2\dot{a}a, \ \kappa_{22} = 2\dot{b}b, \ \kappa_{33} = 2\dot{c}c \tag{220}$$

e i simboli di Christoffel tridimensionali $\lambda^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$. Usando le formule (178) per il sistema di riferimento sincrono, otteniamo le espressioni per le componenti del tensore di Ricci, diversi da zero:

$$
\begin{aligned}
R^0_0 &= -\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c}, \\
R^1_1 &= -\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right), \\
R^2_2 &= -\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}}{b}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c}\right), \\
R^3_3 &= -\frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\dot{c}}{c}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b}\right).
\end{aligned}
\tag{221}
$$

Cerchiamo una soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto. In questo caso tutte le componenti del tensore di Ricci sono uguali a zero e usando le uguaglianze $R^0_0 = 0$ e $R^0_0 - R^1_1 - R^2_2 - R^3_3 = 0$ e le equazioni (221), arriviamo alla seguente coppia di equazioni:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = 0, \tag{222}$$

$$\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} = 0. \tag{223}$$

Proviamo a cercare la soluzione delle equazioni (222)–(223) nella forma

$$a = t^{p_1},\ b = t^{p_2},\ c = t^{p_3}. \tag{224}$$

Sostituendo le espressioni (224) nelle equazioni (222) e (223) otteniamo rispettivamente

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p_1 + p_2 + p_3, \tag{225}$$

$$p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 = 0. \tag{226}$$

L'ultima equazione può essere rappresentata come

$$p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 = \frac{1}{2}((p_1 + p_2 + p_3)^2 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)) = 0. \tag{227}$$

Combinando le equazioni (225) e (227) otteniamo due soluzioni:

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0, \tag{228}$$

che è nient'altro che lo spazio-tempo di Minkowski e

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \tag{229}$$

Quest'ultima soluzione è stata trovata da E. Kasner nel 1921. Per studiare le proprietà delle potenze p_1, p_2 e p_3 è conveniente usare la seguente rappresentazione (laddove abbiamo scelto l'ordine $p_1 < p_2 < p_3$):

$$p_1 = -\frac{u}{1 + u + u^2}, \tag{230}$$

$$p_2 = \frac{u + 1}{1 + u + u^2}, \tag{231}$$

$$p_3 = \frac{u(u + 1)}{1 + u + u^2}, \tag{232}$$

dove il parametro u prende i valori nell'intervallo $1 \leq u < \infty$. Dalle equazioni (230)–(232) segue che

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} &\leq p_1 \leq 0, \\ 0 \leq p_2 &\leq \frac{2}{3}, \\ \frac{2}{3} &\leq p_3 \leq 1. \end{aligned} \tag{233}$$

Questo significa che due potenze sono positive e una è negativa e, quindi, l'universo si espande in due direzioni e si contrae in una direzione, o, viceversa: l'universo può espandersi in una direzione e stringersi in due direzioni.

Notiamo che una soluzione particolare delle relazioni (229):

$$p_1 = p_2 = 0, \ p_3 = 1, \tag{234}$$

con l'intervallo

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - t^2 dz^2, \tag{235}$$

rappresenta lo spazio-tempo di Minkowski nelle coordinate particolari. Davvero, introduciamo le due nuove coordinate

$$\begin{aligned} \xi &= t \sinh z, \\ \tau &= t \cosh z. \end{aligned} \tag{236}$$

I differenziali di queste coordinate sono

$$
\begin{aligned}
d\xi &= \sinh z dt + t \cosh z dz, \\
d\tau &= \cosh z dt + t \sinh z dz.
\end{aligned}
\tag{237}
$$

Dalle equazioni (237) si ottengono le espressioni

$$
\begin{aligned}
dt &= \cosh z d\tau - \sinh z d\xi, \\
t dz &= \cosh z d\xi - \sinh z d\tau.
\end{aligned}
\tag{238}
$$

Sostituendo le espressioni (238) nell'equazione (235), arriviamo all'intervallo dello spazio-tempo di Minkowski nelle coordinate τ, ξ, x, y:

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - d\xi^2.$$